10. přednáška a cvičení (28. dubna 2009)

Co jsme dělali na přednášce?
Sekce 4.1, 4.2 a 4.3 ze skript.

Co jsme dělali na cvičení?
Pověděli jsme si, jak se obecně dá pracovat s algebraickým rozšířením racionálních čísel; v teorii čísel (třeba při řešení rovnic) se pak hodí uvažovat obor všech celistvých prvků takovéhoto tělesa (tak, jako jsme už počítali se $\mathbb{Z}[i]$). I když tento obor většinou nemá jednoznačné rozklady na součin ireducibilních prvků, má jednoznačné rozklady na součin prvoideálů – o tom ale víc až na přednášce z Komutativních okruhů. Také jsme si krátce řekli, jak se obecně definuje norma prvku.

Pak jsme zkoumali řešitelnost Pellovy rovnice, která úzce souvisí s popisem invertibilních prvků okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (pro bezčtvercové $d > 0$). Bez důkazu jsme si uvedli, že $x^2 - dy^2 = 1$ má vždy celočíselné řešení, a tedy jich má nekonečně mnoho. Řešili jsme i obecnější rovnice tvaru $x^2 - dy^2 = a, a \in \mathbb{Z}$.

Příklady

0. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 - 5y^2 = 1$ a $x^2 - 5y^2 = -1$.

1. Vyřeš rovnice $x^2 - 3y^2 = 1$ a $x^2 - 3y^2 = 2$.

2. Popiš všechny invertibilní prvky $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3. Spočti normu na tělese $\mathbb{Q}[\sqrt{13}]$.

4. Mějme bezčtvercové $d > 0$. Dokaž, že pokud má rovnice $x^2 - dy^2 = -1$ řešení, má řešení i rovnice $x^2 - dy^2 = 1$.

5. Vyřeš rovnice $x^2 - 6y^2 = 3$ a $x^2 - 6y^2 = 4$.

6. Mějme bezčtvercové $d > 0$. Označme D obor všech celistvých prvků tělesa $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

a) Pokud je $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, je $D = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

b) Pokud je $d \equiv 1 \pmod 4$, je $D = \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{d}}{2}]$.