8. cvičení (24. dubna 2008)

Co jsme dělali?

Připomněli jsme si definici charakteru modulo n a to, že všechny charaktery s operací násobení tvoří grupu. Je-li p prvočíslo, má tato grupa $p-1$ prvků. Používali jsme značení $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ a definovali si Gaussův součet charakteru χ jako

$$g(\chi) = \sum_{t=1}^{p-1} \chi(t)\zeta^t.$$

Legendrův symbol také udává charakter modulo p definovaný $\chi(a) = \left(\frac{a}{p}\right)$, v tom případě mluvíme o kvadratickém charakteru nebo součtu.

Příklady

-1. Popiš všechny charaktery modulo 5.

0. Buď χ netriviální charakter modulo prvočíslo p. Dokaž, že $\sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) = 0$.

1. Popiš všechny charaktery modulo 3.

2. Buď χ kvadratický charakter modulo 3. Spočti hodnotu $(g(\chi))^2$.

3. Dokaž, že $\sum_{a=0}^{n} \zeta_n^a = 0$.

4. Buď p prvočíslo a a primitivní prvek modulo p. Dokaž, že a je kvadratický nezbytek modulo p.

5. Popiš všechny charaktery modulo a) 7, b) 12.

6. Buď p prvočíslo, $a \in \mathbb{Z}_p$. Dokaž, že $\sum_\chi(a) = 0$ pro $a \neq 1$ a $\sum_\chi(a) = p-1$ pro $a = 1$, kde v obou případech sčítáme přes všechny charaktery modulo p.

7. Buď p prvočíslo, ϵ triviální charakter modulo p. Kolik je $g(\epsilon)$?

8. Buď χ charakter modulo 5 splňující $\chi(2) = i$. Spočti $(g(\chi))^4$.