12. cvičení (10. května 2007)

Co jsme dělali?

Pracovali jsme s řetězovými zlomky. Konečné řetězové zlomky vyjadřují racionální čísla; nekonečné periodické řetězové zlomky zase vyjadřují kořeny kvadratických rovnic s celočíselnými koeficienty.

Příklady

-2. Vyjádři $\frac{321}{79}$ jako řetězový zlomek.

-1. Spočti, kolik je $[1, 1, \dots] = [\overline{1}]$.

0. Vyjádři ve tvaru řetězového zlomku číslo $\sqrt{3}$.

1. Vyjádři $\frac{563}{78}$ jako řetězový zlomek.

2. Vyjádři ve tvaru řetězového zlomku číslo $\sqrt{6}$.

3. Spočti, kolik je $[a, a, \dots] = [\overline{a}]$, kde a je libovolné přirozené číslo.

4. Jakému racionálnímu číslu se rovná řetězový zlomek $[1, 1, 1, \dots, 1]$, v němž je n jedniček?

5. Vyjádři ve tvaru řetězového zlomku číslo $\sqrt{a^2+1}$, je-li a přirozené číslo.

6. Zjisti, jak souvisí vyjádření podílu dvou přirozených čísel ve tvaru řetězového zlomku s Euklidovým algoritmem hledajícím jejich NSD.

7. Spočti, kolik je $[1, \overline{3, 2}]$.

8. Vyjádři jako řetězový zlomek číslo $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2$.

9. Pro jaká $D \in \mathbb{R}$ je $\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2}]$? (Použij výsledek 3. z těžších příkladů.)

Těžší příklady

1. Dokaž, že každé reálné číslo α je možné vyjádřit jako součet $\alpha = \beta + \gamma$, kde $\beta = [x, 1, \dots]$ a $\gamma = [y, 1, \dots]$ (x, y jsou libovolná celá čísla, místo $\dots$ je vždy libovolná (konečná nebo nekonečná) posloupnost přirozených čísel).

2. Na tabuli napíšu dvě různá vyjádření každého z čísel $\frac{i}{n} = [0, a_1, a_2, \dots, a_k] = [0, a_1, a_2, \dots, a_k - 1, 1]$ ($a_k \neq 1$), $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ve tvaru řetězového zlomku. Dokažte, že tato vyjádření jde rozdělit do dvojic tak, že v každé dvojici mají vyjádření stejnou délku a první vyjádření vznikne napsáním druhého v opačném pořadí (až na počáteční 0).

3. Ať $D = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_k}]$ a

a) $D \in \mathbb{N}$, $D \neq n^2$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$

b) $D \in \mathbb{Q}$, $D \neq q^2$ pro žádné $q \in \mathbb{Q}$.

Dokaž, že $a_1, \dots, a_k$ je symetrická posloupnost a $k < 2D$. Spočti, kolik je a_k.

4. Urči, pro která racionální čísla q je $q = [0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_k, \dots, a_2, a_1]$.

5. (Pro vášnivé počtáře) Jaký je další člen posloupnosti 2, 3, 41, 7, 13, 19, 58, 31, 106?