10. cvičení (19. dubna 2007)

Co jsme dělali?

Řešili jsme rovnice rozkladem v $\mathbb{Z}[i]$, ale i jinde - třeba v $\mathbb{Z}[\omega]$, kde $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$, což je také euklidovský obor.

Příklady

0. $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}$ ani $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}$ nejsou euklidovské obory.

1. Vyřeš rovnici $y^2 + 1 = x^3$.

2. Dokaž, že $\mathbb{Z}[\omega]$ je euklidovský obor (s normou definovanou $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$.

3. $\alpha \in \mathbb{Z}[\omega]$. Pro která α je $N(\alpha) = 1$, resp. $N(\alpha) = 2$?

4. Vyřeš rovnici $x^2 + 3 = y^3$, y sudé.

5. Vyřeš rovnici $x^2 + 4 = y^3$, x liché.

6. $k \in \mathbb{N}, p \equiv 3 \pmod 4$ prvočíslo. Vyřeš rovnici $x^2 + 16y^2 = p^k$.

7. Vyřeš rovnici $y^2 + 1 = x^5$.

Těžší příklady

1. $x^4 + y^4 = z^2$

2. $x^4 + y^2 = z^4$

3. $x^2 + 4 = y^3$

4. $y^2 + 1 = x^p$, $p \geq 3$ prvočíslo.