8. cvičení (14. dubna 2006)

Co jsme dělali?

Napřed jsme si řekli, že pro $P \in \mathbb{Z}[x]$ platí $a \equiv b \pmod{m} \to P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$ a jak toho využít při řešení nelineárních kongruencí (vhodné metody jsou zkoušení všech možných zbytků a použití Eulerovy věty).

Zbytek cvičení jsme řešili diofantické rovnice (jde o rovnice, které se (nejčastěji) řeší v celých číslech), nejprve rovnici tvaru $\Sigma a_i x_i = b$ s neznámými x_i. Poté (stejně jako na dalším cvičení), jsme řešili složitější rovnice, takže zde společně pro obě cvičení uvedu postupy, které se při jejich řešení hodí (k řešení příkladů z tohoto cvičení by ti mohly stačit jen první 4 metody):

1) Jde-li jedna neznámá (případně nějaký složitější výraz) vyjádřit, vyjádři ji a zjisti, kdy je její hodnota celočíselná.

2) Počítej modulo vhodné malé číslo.

3) Zaveď vhodnou substituci.

4) Rozlož obě strany na součin a použij větu o jednoznačnosti rozkladu na součin prvočísel.

5) Použij nerovnosti.

6) Užitečná skutečnost je třeba tato: neexistují celá c, d a přirozené n taková, že $c^n < d^n < (c+1)^n$.

7) Počítej modulo i třeba trochu větší číslo.

8) Použij (Fermatovu) metodu nekonečného sestupu (z předpokladu existence nenulového řešení sestrojíme menší, také nenulové řešení. Takto bychom mohli pokračovat nekonečně dlouho a dostali bychom nekonečnou klesající posloupnost přirozených čísel - ta ovšem nemůže existovat!).

9) Uprav rovnici do tvaru $uv = a^n$, kde u, v jsou nesoudělná. Pak musí být $u = \pm b^n$, $v = \pm c^n$ pro vhodná b, c.

10) Počítej modulo něco obrovského.

11) Vymysli nějaký jiný trik.

Příklady

Není-li uvedeno jinak, je úkolem najít všechna celočíselná řešení dané rovnice či kongruence.

-2. $2x + 3y = 5$

-1. $2x^2 + 5y + 13 = 0$

0. $y^3 - x^3 = 91$

1. $x^3 \equiv 2 \pmod{5}$

2. $x^8 \equiv 2 \pmod{7}$

3. $5x + 7y = 8$

4. $18x + 20y + 15z = 1$

5. $x(x+3) = 4y - 1$

6. $(x-y)^2 = x + y$

7. $x(y+1)^2 = 243y$

8. $x(x+2y) = p + 3y^2$, p prvočíslo

9. $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$

10. $x + y + z = 14, x + yz = 18$

11. 2^n nejde vyjádřit jako součet několika (aspoň dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel.

12. Všechna ostatní čísla tak vyjádřit jdou.

Těžší příklady

1. $x^3 - 3x + 5 \equiv 0 \pmod{105}$

2. $2^{x+1} - 1 = y^{z+1}, x, y, z \in \mathbb{N}$

3. $x(x+1) = p^{2n}y(y+1), n \in \mathbb{N}$, p prvočíslo

4. $4xy = x + y + z^2, x, y, z \in \mathbb{N}$

5. $y^2 = x^3 + (x+4)^2$