4. cvičení (17. března 2006)

Co jsme dělali?

Řekli jsme si, co je to (nekonečný) řetězový zlomek, a to, že je periodický právě tehdy, když je to kořen nějaké kvadratické rovnice s celočíselnými koeficienty. A pak jsme počítali spoustu příkladů (samozřejmě až poté, co jsme si prozradili, jak je řešit) ...

Příklady

-1. Spočti, kolik je $[1, 1, \dots] = [\overline{1}]$.

0. Vyjádři ve tvaru řetězového zlomku číslo $\sqrt{3}$.

1. Vyjádři ve tvaru řetězového zlomku čísla $\sqrt{5}$ a $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

2. Spočti, kolik je $[a, a, \dots] = [\overline{a}]$, kde a je libovolné přirozené číslo.

3. Vyjádři ve tvaru řetězového zlomku čísla $\sqrt{a^2+1}$ a $\sqrt{b^2+4}$ (a je přirozené, b je liché).

4. Vyjádři jako (konečný) řetězový zlomek číslo $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2$.

5. Pro jaká $D \in \mathbb{R}$ je $\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2}]$? (Použij výsledek 3. z těžších příkladů.)

6. Pro jaká $D \in \mathbb{R}$ je $\sqrt{D} = [a, \overline{1, 1, 1, 1, 1, a}]$?

Těžší příklady

1. Na tabuli napíšu dvě různá vyjádření každého z čísel $\frac{i}{n} = [0, a_1, a_2, \dots, a_k] = [0, a_1, a_2, \dots, a_k - 1, 1]$ ($a_k \neq 1$), $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ve tvaru řetězového zlomku. Dokažte, že tato vyjádření jde rozdělit do dvojic tak, že v každé dvojici mají vyjádření stejnou délku a první vyjádření vznikne napsáním druhého v opačném pořadí (až na počáteční 0).

2. Urči, pro která racionální čísla q je $q = [0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_k, \dots, a_2, a_1]$.

3. Ať $D = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_k}]$ a

a) $D \in \mathbb{N}$, $D \neq n^2$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$

b) $D \in \mathbb{Q}$, $D \neq q^2$ pro žádné $q \in \mathbb{Q}$.

Dokaž, že $a_1, \dots, a_k$ je symetrická posloupnost a $k < 2D$. Spočti, kolik je a_k.

4. Dokaž, že každé reálné číslo α je možné vyjádřit jako součet $\alpha = \beta + \gamma$, kde $\beta = [x, 1, \dots]$ a $\gamma = [y, 1, \dots]$ (x, y jsou libovolná celá čísla, místo ... je vždy libovolná (konečná nebo nekonečná) posloupnost přirozených čísel).

5. (Pro vášnivé počtáře) Jaký je další člen posloupnosti 2, 3, 41, 7, 13, 19, 58, 31, 106?