2. cvičení (3. března 2006)

Co jsme dělali?

Řekli jsme si, co je to obor integrity, co Euklidovský obor integrity a co obor integrity hlavních ideálů. A dokázali jsme, že každý Euklidovský obor integrity je také oborem integrity hlavních ideálů.

Také obor celých čísel je oborem integrity hlavních ideálů.

A hlavně jsme definovali, co je to kongruence (modulo nějaké přirozené číslo).

Příklady

0. Dokaž, že $112 | (835^5 + 6)^{18} - 1$.

1. Spočti (462, 273). Najdi x, y tak, aby $(462, 273) = 462x + 273y$.

2. Urči, kolik je $5^{20} \pmod{26}$

3. Pro libovolná celá čísla a, b a prvočíslo p platí $a^p + b^p \equiv (a+b)^p \pmod{p}$.

4. Pro libovolná celá čísla a, b platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod{7}$.

5. Dokaž, že $7 | 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ pro každé přirozené n.

6. Dokaž, že $11 | 5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ pro všechna přirozená k, m, n.

Těžší příklady

1. $19 \cdot 8^n - 17$ je složené číslo.

2. Jde rozestavit na obvod kruhu čísla 1, 2, ..., 12 tak, aby pro libovolná 3 čísla a, b, c, která jsou v tomto pořadí vedle sebe, platilo $b^2 \equiv ac \pmod{1}3$.

3. Existuje takové přirozené číslo n, že číslo $4^n - 2^{n-1}$ je krychle (třetí mocnina celého čísla)?