1. cvičení (24. února 2006)

Co jsme dělali?
Definici dělitelnosti, největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, větu o dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus.

Dále Bezoutovu větu, podle níž pro každá a, b existují x a y taková, že $(a,b) = ax + by$, a taky postup, jak tato x a y najít za pomoci Euklidova algoritmu.

A nezapomněli jsme ani na tvrzení, že $n \cdot D = a \cdot b$, kde n je nejmenší společný dělitel čísel a, b a D jejich nejmenší společný násobek.

A na závěr jsme si prozradili rozdíl mezi prvočinitelem a ireducibilním prvkem. V celých číslech ovšem tyto pojmy splývají a platí, že každé číslo jde (v jistém smyslu) jednoznačně vyjádřit jako součin prvočísel.

Příklady
-1. Spočti (14, 35).
0. Spočti (1+3n, 1+2n).
1. Pro která n $n+1|n^2+1$?
2. Součet čtverců (druhých mocnin) dvou po sobě jdoucích přirozených čísel dává zbytek 1 po dělení 4.
3. Spočti (252, 180). Najdi x, y tak, aby $(252, 180) = 252x + 180y$.
4. V závislosti na n urči (2n-1, 9n+4).
5. Spočti $(2^{63} - 1, 2^{98} - 1)$.
6. Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že mezi čísly $n+1, n+2, \ldots, n+10$ je největší možný počet prvočísel.
7. Pro každé prvočíslo p a přirozené číslo $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ platí $p|\binom{p}{k}$.
8. Každé přirozené $n > 6$ jde napsat jako součet dvou nesoudělných čísel (různých od 1).
9. Pro každé $n > 2$ existuje prvočíslo, které leží mezi n a $n!$.
10. Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$.

Těžší příklady
1. Existuje nekonečně mnoho n takových, že $n|2^n + 1$.
2. Pro každé liché k a přirozené n platí $2^{n+2}|k^{2^n} - 1$.
3. Kolik je $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1)$?
4. Najdi všechny trojice po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž každé je (aspoň první) mocninou prvočísla.
5. Pro každé $k > 1$ existuje nekonečně mnoho n takových, že $2^{2^n} + k$ je složené číslo. Jak je tomu pro $k = 1$?