3. proseminář (13. března 2008)

Co jsme dělali?

Pověděli jsme si, co je to kongruence, a uvedli si jejich základní vlastnosti. A navíc jsme si stihli uvést a dokázat malou Fermatovu větu.

Příklady

-1. Dokaž, že $112 | (835^5 + 6)^{18} - 1$.

0. $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) nejde vyjádřit jako součet čtverců (to znamená druhých mocnin) přirozených čísel.

1. Urči, kolik je $5^{20} \pmod{26}$.

2. Pro libovolná celá čísla a, b a prvočíslo p platí $a^p + b^p \equiv (a+b)^p \pmod{p}$.

3. Dokaž, že $7 | 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ pro každé přirozené n.

4. Pro libovolná celá čísla a, b platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod{7}$.

5. Dokaž, že $11 | 5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ pro všechna přirozená k, m, n.

6. Žádné číslo tvaru $8k \pm 3$ nejde vyjádřit jako $x^2 - 2y^2$.

7. Dokaž, že $13 | 2^{70} + 3^{70}$.

8. Mějme různá prvočísla p a q. Dokaž, že $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Těžší příklady

1. $19 \cdot 8^n + 17$ je složené číslo.

2. Jde rozestavit na obvod kruhu čísla 1, 2, ... , 12 tak, aby pro libovolná 3 čísla a, b, c, která jsou v tomto pořadí vedle sebe, platilo $b^2 \equiv ac$ (mod 1)3.

3. Existuje takové přirozené číslo n, že číslo $4^n - 2^{n-1}$ je krychle (třetí mocnina celého čísla)?