2. proseminář (6. března 2008)

Co jsme dělali?

Definici prvočísla a tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho a že každé přirozené číslo jde vyjádřit (až na pořadí) jednoznačně jako součin prvočísel.

Definici dělitelnosti, největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, větu o dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus.

Dále Bezoutovu větu, podle níž pro každá a, b existují x a y taková, že $(a, b) = ax + by$, a taky postup, jak tato x a y najít za pomoci Euklidova algoritmu.

A nezapomněli jsme ani na tvrzení, že $n \cdot D = a \cdot b$, kde n je nejmenší společný dělitel čísel a, b a D jejich nejmenší společný násobek.

Příklady

-1. Spočti $(14, 35)$ a najdi $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $(14, 35) = 14x + 35y$.

0. V závislosti na $n \in \mathbb{Z}$ spočti $(2n - 1, 3n + 1)$.

1. Dokaž, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ nejde číslo $6n + 5$ vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

2. Spočti $(252, 180)$ a najdi $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $(252, 180) = 252x + 180y$.

3. Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že obě čísla $2^n - 1, 2^n + 1$ jsou prvočísla.

4. V závislosti na $n \in \mathbb{Z}$ spočti $(2n - 1, 9n + 4)$.

5. Pro každé prvočíslo p a přirozené číslo $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p - 1\}$ platí $p \mid \binom{p}{k}$.

6. Spočti $(2^{63} - 1, 2^{98} - 1)$.

7. Součet čtverců (druhých mocnin) čísel $n, n + 1$ dává vždy zbytek 1 po dělení 4.

8. Každé přirozené $n > 6$ jde napsat jako součet dvou nesoudělných čísel (různých od 1).

9. Pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \neq c$ platí $a-c \mid ab+cd$ právě tehdy, když $a-c \mid ad+bc$.

Těžší příklady

1. Kolik je $(2^n - 1, 2^m - 1)$?

2. Pokud pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab = cd$, pak je číslo $a^n + b^n + c^n + d^n$ složené.

3. Pro každé $k > 1$ existuje nekonečně mnoho n takových, že $2^{2^n} + k$ je složené číslo. Jak je tomu pro $k = 1$?