5. proseminář (20. 3. 2007)

Co jsme dělali?

Řekli jsme si, jakej chytrej chlápek byl ten Euler a že se po něm jmenuje jednak Eulerova funkce $\varphi(n)$ a taky Eulerova věta.

A pak jsme řešili kongruence - jednak lineární kongruenci $ax \equiv b \pmod{m}$ a taky soustavu kongruencí tvaru $x \equiv b_i \pmod{m}_i$. O jejím řešení mluví čínská zbytková věta.

Příklady

-1. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $29x \equiv 1 \pmod{17}$.

0. Dva bratři (jednomu bylo 5 a druhému 7 let) měli spravedlivě rozděleno několik hraček. Co ale čert nechtěl, narodila se jim sestřička. Až trochu vyrostla (a byly jí 3 roky), chtěla taky nějaké hračky, se kterými by si mohla hrát. Bratříčci byli hodní, a tak se chtěli se sestřičkou rozdělit. Ať to ale zkoušeli, jak jen chtěli, spravedlivě rozdělit hračky se jim nedařilo - vždy 2 zbyly. Kolik mohli mít celkem hraček?

1. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$.

2. Spočti $\varphi(84)$.

3. Vyřeš soustavu $x \equiv -3 \pmod{49}$, $x \equiv 2 \pmod{11}$.

4. Vyřeš soustavu $4x \equiv 1 \pmod{27}$, $5x \equiv 27 \pmod{51}$.

5. Pro která přirozená m je $\varphi(m)$ liché číslo?

6. V závislosti na $a \in \mathbb{Z}$ urči $a^{101} \pmod{125}$.

7. Ať je $p \equiv 3 \pmod{4}$ prvočíslo a $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou taková čísla, že $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Dokaž, že $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$. (Nápověda: Dokazuj sporem; kongruenci převeď na kongruenci $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ a použij malou Fermatovu větu.)

8. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$. Dokaž, že existuje k po sobě jdoucích přirozených čísla, z nichž každé je tvaru ab^n pro vhodná $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 1$.

Těžší příklady

1. Vyřeš kongruenci $(a+b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab}$, kde $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$.

2. Myslím si přirozené číslo $n, 1 \leq n < 100$. Pomocí 7 otázek na hodnotu $(n + c, d)$ pro tebou zvolená $c, d, 1 \leq c, d < 100$, zjisti, o jaké číslo jde!

3. Vyřeš $23941x \equiv 915 \pmod{3564}$.