4. proseminář (13. 3. 2007)

Co jsme dělali?

Pověděli jsme si, co je to kongruence, a uvedli si jejich základní vlastnosti. A navíc jsme si stihli uvést a dokázat malou Fermatovu větu.

Příklady

-1. Dokaž, že $112|(835^5+6)^{18}-1$.

0. $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) nejde vyjádřit jako součet čtverců (to znamená druhých mocnin) přirozených čísel.

1. Urči, kolik je $5^{20} \pmod{26}$.

2. Pro libovolná celá čísla a, b a prvočíslo p platí $a^p + b^p \equiv (a+b)^p \pmod{p}$.

3. Dokaž, že $7|37^{n+2}+16^{n+1}+23^n$ pro každé přirozené n.

4. Pro libovolná celá čísla a, b platí $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod{7}$.

5. Dokaž, že $11|5^{5k+1}+4^{5m+2}+3^{5n}$ pro všechna přirozená k, m, n.

6. Žádné číslo tvaru $8k \pm 3$ nejde vyjádřit jako x^2-2y^2.

7. Dokaž, že $13|2^{70}+3^{70}$.

8. Mějme různá prvočísla p a q. Dokaž, že $p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Těžší příklady

1. $19 \cdot 8^n + 17$ je složené číslo.

2. Jde rozestavit na obvod kruhu čísla 1, 2, ... , 12 tak, aby pro libovolná 3 čísla a, b, c, která jsou v tomto pořadí vedle sebe, platilo $b^2 \equiv ac \pmod{1}3$.

3. Existuje takové přirozené číslo n, že číslo $4^n - 2^{n-1}$ je krychle (třetí mocnina celého čísla)?