**2. proseminář** (27. 2. 2007)

**Co jsme dělali?**

Mluvili jsme o tom, co to vlastně ta teorie čísel je, a zmínili se o několika významných tvrzeních (prvočíselná věta, velká Fermatova věta, věta o 4 čtvercích, Dirichletova věta o aritmetické posloupnosti) a některých hypotézách (Goldbachova hypotéza, otázka existence nekonečně mnoha prvočíselných dvojčat).

Pak jsme, nejspíš podobně jako Pythagoras, dokázali, že $\sqrt{2}$ je iracionální. To vedlo k definici algebraického čísla.

**Příklady**

**-1.** $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

**0.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je algebraické a iracionální číslo; najdi polynom, jehož je kořenem.

**1.** Dokaž, že následující čísla jsou algebraická a iracionální; pro každé z nich najdi polynom, jehož je kořenem.

a) $1+\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

c) $\sqrt{[3]2+\sqrt{6}}$

**2.** Pro která $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{Q}^+$ je $\sqrt{[n]q}$ racionální?

**3.** Je číslo $0,12345678910111213141 5\ldots$ racionální?

**4.** Dokaž, že Goldbachova hypotéza (tvrzení, že každé sudé číslo $\geq 4$ je součtem dvou prvočísel) je ekvivalentní s tvrzením, že každé sudé číslo $\geq 6$ je součtem tří prvočísel.

**Těžší příklady**

**1.** Dokaž, že součet a součin dvou algebraických čísel je zase algebraické číslo.

**2.** Dokaž, že existují iracionální čísla $a, b$ taková, že $a^b$ je racionální.