3. cvičení z algebry (11. března 2009)

Co jsme dělali?

Definovali jsme dělitelnost v obecném (komutativním) okruhu, invertibilní prvek a asociované prvky. Množina všech invertibilních prvků libovolného okruhu je grupa. Tyto pojmy jsme si ukázali na několika příkladech okruhů: $\mathbb{Z}$, těleso, $R[x]$, $R[[x]]$ pro OI R.

Dále to byly nejrůznější číselné okruhy – $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}], \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. V nich se často hodí definovat si normu jako $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$, kde $\overline{\alpha}$ značí komplexně sdružené číslo. Takot definovaná norma je celé číslo; jde-li ale o podokruh reálných čísel (třeba $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$), je potřeba ji definovat trochu jiným, ale také přirozeným způsobem.

Příklady

Všechny okruhy jsou opět komutativní.

-1. Najdi invers k $1 + x$ v $\mathbb{Z}[[x]]$.

0. Jaké jsou invertibilní prvky okruhu $\mathbb{Z}[i]$?

1. Najdi invers k $1 + 2x$ v $\mathbb{Z}[[x]]$.

2. Jaké jsou invertibilní prvky okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$?

3. Najdi invers k $1 + x + x^2$ v $\mathbb{Z}[[x]]$.

4. Označme $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Dokaž, že $\mathbb{Z}[\omega]$ je okruh, spočti normu $N(a + b\omega)$ a popiš všechny invertibilní prvky.

5. Najdi okruh R takový, že $(R[x])^* \neq R^*$.

6. a) Dokaž, že $(T[[x]])^* = \{\sum a_i x^i | a_0 \neq 0\}$ pro těleso T

b) Dokaž, že pro každé $f \in T[[x]]$ existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $f \| x^k$.

7. Je-li R konečný OI, jde o těleso.

8. Popiš invertibilní prvky v $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

9. Popiš invertibilní prvky v $\mathbb{Z}_4[x]$.