2. cvičení z algebry (4. března 2009)

Co jsme dělali?

Připomněli jsme si pojem oboru integrity a jeho charakteristiky. Pak jsme pracovali s polynomy a formálními mocninnými řadami (zejména) nad komutativními obory integrity.

Řekli jsme si, jak hledat racionální kořeny celočíselných polynomů (viz 10. příklad). Nad OI jde každý polynom vydělit monickým polynomem se zbytkem.

Příklady

Ve všech příkladech předpokládáme, že všechny okruhy (a obory integrity) jsou komutativní.

1. Najdi všechny kořeny polynomu $x^4 - x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.

2. Ať R je obor integrity, $f \in R[x]$ a $a \in R$. Dokaž, že $f(a) = 0$, právě když $x - a|f(x)$.

3. Dokaž, že je-li R obor integrity, je $R[x]$ také obor integrity.

4. Do polynomu $\_x^4 + \_x^3 + \_x^2 + \_x + \_$ vepíšu na volná místa v libovolném pořadí čísla 1, -2, 3, 4, -6. Dokaž, že vzniklý polynom má v $\mathbb{Z}$ vždy kořen.

5. Najdi všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - x^2 + 3$.

6. Dokaž, že polynom stupně n nad oborem integrity má nejvýše n kořenů.

7. Najdi okruh, kde tvrzení z 6. příkladu neplatí.

8. Najdi okruh R a polynomy f, g nad R takové, že f nejde vydělit g se zbytkem.

9. Mějme $f(x) \in \mathbb{R}(x)$. Dokaž, že všechny koeficienty u lichých mocnin x jsou nula, právě když pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(-x)$. Jak je tomu u polynomů nad obecným OI?

10. Nechť má $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n \neq 0$ racionální kořen $r/s, r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, s \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NSD}(r, s) = 1$. Pak $r|a_0, s|a_n$.

11. Dokaž, že je-li R OI, je také $R[[x]]$ OI.

12. Buď R nekonečný OI. Mějme $f, g \in R[x]$ takové, že pro všechna $x \in R$ platí $f(x) = g(x)$. Dokaž, že potom $f = g$.

13. Najdi konečný OI R takový, že existují $f, g \in R[x]$, pro všechna $x \in R$ platí $f(x) = g(x)$, a přesto $f \neq g$.

14. Nechť má $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ racionální kořen $r/s, r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, s \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NSD}(r, s) = 1$. Pak pro všechna celá čísla k platí $r - ks|f(k)$.

15. Ať $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Dokaž, že neexistují nenulové $f, g, h \in \mathbb{Z}[x]$ takové, že $f^n + g^n = h^n$ (v řešení můžeš využít velké Fermatovy věty, která říká, že neexistují celá čísla s uvedenou vlastností).