Komutativní okruhy: Cvičení 6

17. prosince 2019

1. Urči v oboru celých čísel $\mathbb{Z}(+,-,0,\cdot,1)$

   a) $\sqrt{(0)}$, $J(\mathbb{Z})$,

   b) $\sqrt{(25)}$, $\sqrt{(125)}$, $\sqrt{(50)}$, $\sqrt{(100)}$, $\sqrt{(\prod_i p_i^{r_i})}$ pro po dvou různá prvočísla p_i.

   Dále urči

   c) $J(\mathbb{Z}/(100))$,

   d) * kdy je $(\mathbb{Z}/(n))/J(\mathbb{Z}/(n))$ těleso.

2. Rozhodni, které z následujících množin jsou algebraické:

   a) $\{(t,t^2,t^3) \in K^3 | t \in K\}$,

   b) $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$,

   c) * $\{(t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$.

3. Buď K těleso.

   a) Pro $S \subset K[x_1,\dots,x_n]$ dokaž $V(I(V(S))) = V(S)$.

   b) Pro $X \subset K^n$ dokaž $I(V(I(X))) = I(X)$.

   c) Pro ideál $I < K[x_1,\dots,x_n]$ dokaž $I(V(I)) \supset \sqrt{I}$.

4. Buď R gaussovský obor a T jeho podílové těleso. Je-li $u \in T$ celistvé nad R, pak $u \in R$.

Další příklady:

5. V oboru polynomů nad komplexními čísly $\mathbb{C}[x](+,-,\cdot,0,1)$

   a) spočítej $\sqrt{(0)}$, $J(\mathbb{C}[x])$, $\sqrt{(x-3)^5(x-1)^4(x^3+2)}$, $\sqrt{(x^6-x^4-x^2+1)}$,

   b) dokaž, že $\sqrt{(p)} = (\frac{p}{NSD(p,p')})$, kde $p \in \mathbb{C}[x]$.

6. Je-li K konečné těleso, pak je každá podmnožina v K^n algebraická.

7. Buď K nekonečné těleso a $V = \{(t,t^2,t^3,\dots,t^n) | t \in K\} \subset K^n$.

   a) Najdi $I(V)$ (a dokaž svou odpověď).

   b) Dokaž, že V je ireducibilní.

8. Pracujme nad $K = \mathbb{C}$.

   a) Dokaž, že $I(V(x^2-y)) = (x^2-y)$ a že algebraická množina $V(x^2-y) \subset \mathbb{C}^2$ je ireducibilní.

   b) Urči množinu $V(y^4-x^2, y^4-x^2y^2+xy^2-x^3) \subset \mathbb{C}^2$ a rozlož ji na ireducibilní komponenty.

   c) * Rozlož $V(x^2+y^2-1, x^2-z^2-1) \subset \mathbb{C}^3$ na ireducibilní komponenty.

9. Dokaž, že $f(x,y) = y^2+x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x,y]$ je ireducibilní polynom, ale množina $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ je reducibilní.

10. Pokud K není algebraicky uzavřené, pak Hilbertova věta o nulách neplatí (tedy věty 3.15b), 3.16).

Úlohy s * jsou trochu těžší.