Komutativní okruhy: Cvičení 5

3. prosince 2019

1. Buď U rozkladové, resp. kořenové nadtěleso polynomu $f(x)$ nad tělesem T. Urči $U, [U : T], \mathrm{Gal}(U/T)$, bázi U jako vektorového prostoru nad tělesem T.

   Rozhodni, zda jde o Galoisovo rozšíření, a pokud ano, tak popiš všechna tělesa $U \supset V \supset T$, jestliže

   a) $f(x) = x^2 - 5, T = \mathbb{Q}$

   b) $f(x) = x^3 - 2, T = \mathbb{Q}$

   c) $f(x) = x^3 - 2, T = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/3})$

   d) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5), T = \mathbb{Q}$

   e) $f(x) = x^{12} - 1, T = \mathbb{Q}$

   f) $f(x) = x^{20} - 1, T = \mathbb{Q}(i)$

   h) $f(x) = x^n - 1$, $T = \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$

2. Pro rozšíření těles $U \supset T$ urči $[U : T], \mathrm{Gal}(U/T)$, bázi U jako vektorového prostoru nad tělesem T.

   Rozhodni, zda jde o Galoisovo rozšíření, a pokud ano, tak popiš všechna tělesa $U \supset V \supset T$, jestliže

   a) $U = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}), T = \mathbb{Q}$

   b) $U = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i), T = \mathbb{Q}$

   c) atd. :)

Další příklady:

3. Mějme tělesa $V \supset U \supset T$ taková, že $V \supset T$ a $U \supset T$ jsou normální rozšíření. Pak $\mathrm{Gal}(V/U) \lhd \mathrm{Gal}(V/T)$ a $\mathrm{Gal}(V/T)/\mathrm{Gal}(V/U) \simeq \mathrm{Gal}(U/T)$.

4. Dokaž větu 2.28 (o rozšíření $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \supset \mathbb{Q}$).

Příklady 1b) a 2b) jsem na začátku cvičení vyřešil na tabuli.