Komutativní okruhy: Cvičení 4

26. listopadu 2019

1. Buď U těleso a $G < \mathrm{Aut}(U)$ podgrupa. Pak $\mathrm{Gal}(U/\mathrm{Fix}(U,G)) \supset G$.

2. Buď $V \supset U \supset T$ rozšíření těles.

   a) Ať $V \supset T$ je normální. Pak $V \supset U$ je normální. Musí být $U \supset T$ normální?

   b) Ať $V \supset T$ je Galoisovo. Pak $V \supset U$ je Galoisovo.

3. Pro rozšíření těles $U \supset T$ urči $[U : T], [U : T]_s, \mathrm{Gal}(U/T)$, pokud $T = \mathbb{R}, U = \mathbb{C}$.

4. Buď $V \supset T$ Galoisovo rozšíření a $V \supset U \supset T$. Dokaž, že

$$[U : T] = \frac{\#\mathrm{Gal}(V/T)}{\#\mathrm{Gal}(V/U)}.$$

5. Buď $U \supset T$ konečné rozšíření. Toto rozšíření je Galoisovo, právě když $[U : T] = \#\mathrm{Gal}(U/T)$.

6. Prvek $\alpha \in U$ je separabilní nad tělesem T, pokud je kořenem nějakého separabilního polynomu.

Další příklady:

7. Buď $f(x) \in T[x]$ polynom, jehož ireducibilní rozklad nad T je $f(x) = f_1(x) \cdots f_k(x)$. Uvažujme Galoisovu grupu rozkladového nadtělesa polynomu f jako grupu permutací na množině jeho kořenů. Dokaž, že každá z těchto permutací obsahuje aspoň k cyklů (pevný bod zde považujeme za cyklus délky 1).

8. Pro rozšíření těles $U \supset T$ urči $[U : T], [U : T]_s, \mathrm{Gal}(U/T)$, pokud $T = \mathbb{F}_p(y), U = T(\sqrt[p]{y})$ (k ověření ireducibility použij Eisensteinovo kritérium).

9. Buď $U \supset T$ rozšíření těles. Všechny prvky $\alpha \in U$, jež jsou separabilní nad T, tvoří podtěleso U (tzv. separabilní uzávěr T v U).

10. Rozšíření $U \supset T$ je normální, právě když existuje množina $\mathcal{M} \subset T[x]$ taková, že U je rozkladové nadtěleso množiny $\mathcal{M}$ nad T.

11. Dokaž tvrzení 2.24 ze skript (o existenci normálního uzávěru).

12. Buď U těleso charakteristiky různé od 2 a $a, b \in U$ prvky takové, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \notin U$. Pak $[U(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : U] = 4$.