Komutativní okruhy: Cvičení 3

5. listopadu 2019

1. Pro těleso T a polynom $f(x)$ urči: všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad T, rozkladové nadtěleso pro f nad T, stupně rozšíření všech těchto těles a také jejich Galoisovy grupy nad T.

   a) $f(x) = x^2 + 3$, $T = \mathbb{R}$

   b) $f(x) = x^2 - 1$, $T = \mathbb{Q}$

   c) $f(x) = x^3 - 1$, $T = \mathbb{Q}$

2. Ať je prvek α algebraický nad tělesem T a $f \in T[x]$ je jeho minimální polynom. Pak $[T(\alpha) : T] = \deg f$.

3. Buď R gaussovský obor a T jeho podílové těleso. Je-li $u \in T$ celistvé nad R, pak $u \in R$.

4. Buďte T, U tělesa charakteristiky 0. Pak $\mathbb{Q} \subset T, U$ a každý homomorfismus $\varphi : T \to U$ je $\mathbb{Q}$-homomorfismem.

5. Mějme tělesa $T \subset U \subset V$. Je-li V algebraické nad U a U algebraické nad T, pak je také V algebraické nad T.

6. Buď $T \subset U$ algebraické rozšíření těles a $U \subset K$ (ne nutně algebraické). Pak K je algebraický uzávěr U, právě když K je algebraický uzávěr T.

7. Urči okruh celistvých prvků v tělese a) $\mathbb{Q}(i)$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, c) * $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. (Použij cvičení 12.)

Další příklady:

8. Pro těleso T a polynom $f(x)$ urči: všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad T, rozkladové nadtěleso pro f nad T, stupně rozšíření všech těchto těles a (případně) také jejich Galoisovy grupy nad T.

   a) $f(x) = x^2 + 1$, $T = \mathbb{Q}$

   b) $f(x) = x^4 - 1$, $T = \mathbb{Q}$

   c) $f(x) = x^3 - 2$, $T = \mathbb{Q}$

   *d) $f(x) = x^n - 1$, $T = \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$)

9. Prvek α je algebraický nad tělesem T, právě když $T(\alpha) = T[\alpha]$.

10. Rozšíření těles konečného stupně je nutně algebraické.

11. Mějme rozšíření těles $V \supset U \supset T$. Pak $[V : T] = [V : U] \cdot [U : T]$.

12. Je-li R gaussovský obor, $R \subset S$ a $\alpha \in S$ celistvý prvek nad R, pak minimální polynom α nad R jde zvolit jako monický.

    Pozn.: Minimálním polynomem nad oborem zde myslíme toto: Buď T podílové těleso R a $m(x)$ minimální monický polynom α nad T. Minimální polynom α nad R pak definujeme jako $n \cdot m(x)$, kde n je nejmenší společný násobek jmenovatelů všech koeficientů polynomu $m(x)$ (neboli $n \cdot m(x)$ je primitivní).

13. Žádné konečné těleso není algebraicky uzavřené.

14. * Algebraický uzávěr nekonečného tělesa T má stejnou mohutnost jako T.

15. Ať je obor S konečně generovaný okruh nad R. Pak S je konečně generovaný R-modul, právě když S je celistvý nad R (neboli každý prvek $s \in S$ je celistvý nad R).

16. Pro která $m, n \in \mathbb{Z}$ jsou tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ $\mathbb{Q}$-izomorfní?

Úlohy s * jsou trochu těžší.