Kapitola 12

Metrické prostory

Trocha historie

Již několikrát jsme se setkali s obecnými mechanismy, které bylo možno použít v mnoha případech. Byl to nejen např. způsob dokazování nebo technický trik, ale i použití obecných vět, platných v různých *strukturách.* Užili jsme např. vícekrát princip vložených intervalů či jednu substituci pro výpočet primitivních funkcí k funkcím určitého tvaru. Při práci se spojitými nebo integrovatelnými funkcemi jsme často používali pojem *lineární prostor*, který je příkladem vcelku jednoduché, avšak velmi důležité struktury. To vše ilustruje užitečnost „obecného“ přístupu.

Nyní se seznámíme s pojmem *metrický prostor*, což je struktura, která má pro matematickou analýzu zásadní význam (dále budeme často užívat zkráceného označení MP). Množství příkladů, které uvedeme, by mělo postačit při dobrém promyšlení k osvojení teorie: je jednou z mála partií modernější analýzy, která se v tomto textu podrobněji studuje. Budeme se též zabývat *normovanými lineárními prostory* a částečně i *prostory se skalárním součinem.*

Historická poznámka 12.0.11. Látka, kterou vyložíme v následujících dvou kapitolách, vznikla převážně ve 20. století; přesto se již stala klasickou partií analýzy. I když mnoho dílčích poznatků o speciálních metrických prostorech je starších, samotný vznik pojmu metrického prostoru se datuje k r. 1906. Pojem MP byl zaveden Mauricem René Fréchetem (1878 – 1973). Dále jej rozvinul Felix Hausdorff (1868 –1942) ve známé monografii [9] z r. 1914. Eduard Čech (1893 – 1960) je autorem knihy *Bodové množiny* [4], která vyšla r. 1936 a byla na svoji dobu velmi moderní. Vyšla pouze česky, ale byla to jedna z prvních monografií, které byly věnovány metrickým prostorům.

Lineární prostory opatřené *normou* jsou zároveň MP, jejichž metrika je definována pomocí této normy. Jde o strukturu méně obecnou, nežli je MP. Naproti tomu systém všech otevřených množin MP tvoří tzv. *topologii* v tomto prostoru, a tak MP jsou speciálním případem *topologických prostorů.* U této struktury se seznámíme prakticky pouze s její definicí. Velmi důležitý je i geometrický způsob vyjadřování, který budeme používat a který je základem komunikace v moderní matematice.

Protože historie vzniku většiny struktur je dosti složitá, odkazujeme čtenáře na historické poznámky na konci Kapitoly 14. Pro povzbuzení zvědavosti uveďme základní data pro normovaný lineární prostor a pro topologický prostor, která však jsou bez podrobnějšího vysvětlení zavádějící. Se vznikem *teorie* normovaných lineárních prostorů lze svázat rok 1932, kdy byla publikována kniha [1], kterou napsal STEFAN BANACH (1892 – 1945) [1]). Jednotlivé pojmy jsou ovšem staršího data. Podobně lze sledovat vznik topologie zpět až k pracím BERNHARDA RIEMANNA (1826 – 1866), který se první pokusil definovat *topologický prostor*; viz [2], str. 138. Dalším mezníkem jsou práce, které napsal GEORG CANTOR (1845 – 1918) v osmdesátých letech 19. století, v nichž zavedl řadu topologických pojmů (viz dále pojmy okolí, otevřené a uzavřené množiny apod.).

V této kapitole se seznámíme s užívanou terminologií a základními pojmy. Poznamenejme konečně, že je velmi obtížné stanovit autorství jednotlivých tvrzení. Často bývá tvrzení spojeno obsahově s jiným klasickým tvrzením z doby dávno před vznikem obecných struktur a pak se někdy nazývá po objeviteli původního tvrzení. Přitom v některých případech je důkaz obecnějšího tvrzení jednodušší. Čtenáře může napadnout, že pak by bylo lepší postupovat od obecného tvrzení k jeho speciálním případům, a to alespoň v těch případech, kde jsou taková tvrzení k dispozici. Ani to však není vždy rozumné [2]).

12.1 Základní definice, příklady

Definice 12.1.1 (Fréchet 1906*). Nechť $P \neq \emptyset$ a nechť funkce $\varrho : P \times P \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

(1) $\varrho(x, y) \geq 0$ pro všechna $x, y \in P$, tj. ϱ je *nezáporná* funkce;

(2) $\varrho(x, y) = 0$, právě když $x = y$;

(3) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro všechna $x, y \in P$, tj. ϱ je *symetrická* funkce;

(4) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ pro všechna $x, y, z \in P$, tj. ϱ splňuje tzv. *trojúhelníkovou nerovnost.*

Potom ϱ je *metrika* (říkáme: „metrika na P“, i když P není definiční obor ϱ) a číslo $\varrho(x, y)$ je *vzdálenost bodů* $x, y \in P$; často se o ϱ hovoří též jako o vzdálenosti na P. Dvojici (P, ϱ) nazýváme *metrický prostor.*

Poznámky 12.1.2. 1. Množina P je *nosná množina* metrického prostoru (P, ϱ). Často se mluví o „metrickém prostoru P“ a rozumí se tím automaticky dvojice (P, ϱ); s takovou situací jsme se již setkali u $\mathbb{R}$.

---

[1]) Jméno Banach měl po svojí matce *Katarzyně Banach*, kterou však nikdy nepoznal. Jeho otcem byl *Stefan Greczek* a je zajímavé, že byl, stejně jako Banach, samouk.

[2]) Prof. VOJTĚCH JARNÍK (1897 – 1970) hlásal názor, že přechod ke zobecnění je možný v případě, že se zobecňuje *nejméně ze dvou* speciálních případů.

2. Vlastnosti (1) – (4) z definice MP se užívají k definici MP nejčastěji, jejich počet však lze omezit. Je-li $P \neq \emptyset$ a ϱ funkce na $P \times P$ taková, že pro všechny body x, y, $z \in P$ platí (2) a podmínka

$$(4') \qquad \varrho(x,y) \leq \varrho(z,x) + \varrho(z,y)\,,$$

je (P,ϱ) metrický prostor. Podrobný důkaz lze jistě přenechat čtenáři, napovíme-li mu, že když do (4') dosadíme $x = y$, dostaneme podmínku (1), a když do (4') dosadíme $z = y$, získáme podmínku (3). Vlastnost (4) se *liší* od (4') (srovnejte pozici bodu z), neboť jsme trojúhelníkovou nerovnost nepatrně modifikovali.

Definice 12.1.3. Buď $P_1 \subset P$, $P_1 \neq \emptyset$. Nechť ϱ_1 je restrikce ϱ na $P_1 \times P_1$. Potom je (P_1,ϱ_1) zřejmě metrický prostor a nazýváme jej *podprostor metrického prostoru* P. O metrice ϱ_1 říkáme, že je na P_1 *indukována* z (P,ϱ). I když je to nedůsledné, značíme ji často stejně: píšeme opět ϱ místo ϱ_1.

Úmluva 12.1.4. Často budeme zavádět pojmy pro podmnožiny (P,ϱ) implicitně: zavedeme je pouze pro celý prostor, budeme je však používat i pro podmnožiny prostoru P, chápané jako jeho podprostory. Na základě tohoto principu např. stačí zavést jen pojem *omezený prostor* (P,ϱ) a je automaticky definována i omezená množina $M \subset (P,\varrho)$: budeme-li mít definován omezený MP, budeme již vědět, co to je omezená množina v MP.

Dále uvedeme větší počet příkladů, na které se budeme později odvolávat. Čtenář by si je měl důkladně promyslit; nejprve uvedeme další důležitou definici:

Definice 12.1.5 (F. Riesz 1910). Nechť X je *lineární prostor* (neboli *vektorový prostor*) nad polem $\mathbb{R}$ nebo nad polem $\mathbb{C}$. Nechť je na X definována reálná funkce p s těmito vlastnostmi:

(1) $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$,

(2) $p(x) = 0$, právě když $x = 0$,

(3) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$,

(4) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in X$.

Tato funkce se nazývá *norma* na X; budeme pro ni zpravidla užívat označení $\|\cdot\|$, resp. jeho různé modifikace; píšeme tedy např. $\|x\|$ místo $p(x)$. Dvojice (X,p) je *normovaný lineární prostor* nad polem $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$). [3]).

Poznámka 12.1.6. Nelze zcela pominout historii vzniku lineárního prostoru. Axiomatickou definici podal r. 1888 Giuseppe Peano (1858 – 1932) v knize *Calcolo geometrico secondo*; kniha zůstala delší dobu málo známá. Mezi jeho předchůdce jsou řazeni Bernard Bolzano (1781 – 1848) (1804), Edmund Nicolas Laguerre (1834 – 1886) (1867), Herrman Günther Grassman (1809 – 1877) (1844, 1862). Na Peana navázal

[3]) S normovaným lineárním prostorem nad polem $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel v tomto textu nebudeme pracovat.

Salvatore Pincherle (1853 – 1936) (1896/97), který je po Peanovi znám jako autor druhé *knihy* o LP (1901), a celá italská matematická škola.

Pojem normovaného lineárního prostoru se objevuje poprvé patrně v práci, kterou napsal r. 1910 Frederik (Frigyes) Riesz (1880 – 1956), a v několika dalších pracích z let 1920 – 1922, které napsali Eduard Helly (1884 – 1943), Hans Hahn (1879 – 1934), Norbert Wiener (1894 – 1964) a Banach.

Příklad 12.1.7 (velmi důležitý). V každém normovaném lineárním prostoru je přirozeným způsobem definována metrika, takže každý normovaný lineární prostor je zároveň i MP; proto lze do normovaných lineárních prostorů snadno všechny pojmy z teorie MP přenést. Stačí definovat

$$\varrho(x,y) = p(x-y)\,, \quad x,y \in X\,,$$

a dokázat, že ϱ je metrika. To je snadné, neboť vlastnosti metriky (1) – (3) jsou zřejmé. Z trojúhelníkové nerovnosti (4) pro normu plyne trojúhelníková nerovnost (4) pro metriku:

$$\varrho(x,y) = p(x-y) \le p(x-z) + p(z-y) = \varrho(x,z) + \varrho(z,y)\,.$$

Za této situace zpravidla říkáme, že metrika *ϱ je generována* normou p.

Poznámka 12.1.8. Naopak to není pravda, na lineárním prostoru definovaná metrika nemusí s jeho lineární strukturou vůbec souviset. Lze však snadno zjistit více. Je-li ϱ metrika na X, generovaná normou p, platí pro všechna $x,y,z \in X$ a všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ identity

$$\begin{aligned}\varrho(x+z, y+z) &= p(x+z-y-z) = p(x-y) = \varrho(x,y)\,,\\ \varrho(\alpha x, \alpha y) &= p(\alpha x - \alpha y) = |\alpha| p(x-y) = |\alpha|\varrho(x,y)\,.\end{aligned}$$

Má-li metrika ϱ na lineárním prostoru X tyto dvě vlastnosti, lze ji vytvořit pomocí normy p, položíme-li $p(x) = \varrho(0,x)$: vlastnosti normy (1) – (3) jsou zřejmé, vlastnost (4) plyne ze vztahů

$$\begin{aligned}p(x+y) &= \varrho(0,x+y) \le \varrho(0,x) + \varrho(x, x-y) =\\ &= \varrho(0,x) + \varrho(x-x, x-x-y) = \varrho(0,x) + \varrho(0,y) = p(x) + p(y)\end{aligned}$$

Příklad 12.1.9. Množina $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ spolu s funkcí

$$\varrho(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^1\,,$$

tvoří MP; tento prostor je nám již důvěrně známý, o vzdálenosti bodů v $\mathbb{R}$ jsme již (často v intuitivní rovině) mluvili. V dalším budeme ze znalostí tohoto prostoru často získávat motivaci k dalšímu postupu. Mnoho věcí lze jen s malými změnami z tohoto MP převzít a zobecnit.

Příklad 12.1.10. Nechť (P_1, ϱ_1), (P_2, ϱ_2) jsou MP. Jsou-li dvojice $z_1 = [\,x_1, y_1\,]$, $z_2 = [\,x_2, y_2\,]$ prvky $P_1 \times P_2$, definujme na $P_1 \times P_2$ funkci

$$\varrho\,(z_1, z_2) := \varrho_1(x_1, x_2) + \varrho_2(y_1, y_2)\,.$$

Potom je $(P_1 \times P_2, \varrho)$ zřejmě rovněž MP. Je „$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$“, což je pouze dobrá pomůcka k zapamatování.

Podobně: Jsou-li (X_1, p_1), (X_2, p_2) normované lineární prostory a položíme-li

$$p([x_1, x_2]) = p_1(x_1) + p_2(x_2)\,, \qquad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\,,$$

je p norma na $X_1 \times X_2$; můžeme si ji pamatovat jako normu „$p = p_1 + p_2$“.

V obou případech je ověření všech vlastností včetně trojúhelníkové nerovnosti pro metriku ϱ i normu p triviální.

Definice 12.1.11. Prostor $(P_1 \times P_2, \varrho)$, který jsme takto vytvořili, se nazývá *součin metrických prostorů* (P_1, ϱ_1) a (P_2, ϱ_2).

Poznámka 12.1.12. Obecněji se obdobně definuje součin $(P_1 \times \cdots \times P_m, \varrho)$ a také *součin normovaných lineárních prostorů* $(X_1 \times \cdots \times X_m, p)$ pro m prostorů, $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$. Čtenář jistě uhodne, jak lze zavést metriku „$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m$“ v $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$, resp. normu „$p_1 + p_2 + \cdots + p_m$“ v $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$.

Příklad 12.1.13. Nechť (P, ϱ) je libovolný metrický prostor. Ukažme, že pak je

$$\sigma(x, y) := \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}, \quad x, y \in P\,,$$

také metrika na P. Položíme-li

$$a := \varrho(x, z)\,, \quad b := \varrho(x, y)\,, \quad c := \varrho(y, z)\,,$$

jsou a, b, c nezáporná čísla, pro něž $a \le b + c$; máme dokázat, že

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \tag{12.1}$$

Vynásobením součinem jmenovatelů dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$a(1+b)(1+c) \le b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)\,,$$

a po roznásobení další nerovnost

$$\begin{aligned} a + ab + ac + abc &\le b + ab + bc + abc + c + ac + bc + abc\,, \quad \text{resp.} \\ a &\le b + c + 2bc + abc\,. \end{aligned}$$

Protože poslední nerovnost zřejmě platí, platí i ekvivalentní nerovnost (12.1). Protože σ má zřejmě první tři vlastnosti metriky, je (P, σ) MP. Za povšimnutí stojí fakt, že σ je omezená funkce: platí $\sigma \le 1$.

12.2 Eukleidovský prostor

Velmi často pracujeme s množinou všech uspořádaných m-tic reálných čísel. Tuto množinu budeme nazývat *aritmetický m-rozměrný prostor* a značit $\mathbb{A}^m$. Z hlediska algebry je to lineární ($\equiv$ vektorový) prostor, definujeme-li sčítání dvou m-tic

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]\,, \quad y = [y_1, y_2, \ldots, y_m] \tag{12.2}$$

a násobení m-tice číslem $c \in \mathbb{R}$ rovnostmi

$$x + y = [\, x_1{+}y_1, x_2{+}y_2, \ldots, x_m{+}y_m \,] , \quad cx = [\, cx_1, cx_2, \ldots, cx_m \,] . \qquad (12.3)$$

V souvislosti s (12.3) říkáme, že sčítáme a násobíme *po souřadnicích* (nebo *po složkách.*)

Je-li X lineární prostor (nad $\mathbb{R}$), říkáme, že funkce přiřazující (uspořádané) dvojici $[\, x, y \,] \in X \times X$ číslo (x, y) je *skalární součin* na X, jsou-li splněny tyto čtyři podmínky:

(1) Pro každé $x \in X$ je $(x, x) \geq 0$.

(2) Rovnost $(x, x) = 0$ platí, právě když je $x = 0$.

(3) Pro každé dva body $x, y \in X$ je $(x, y) = (y, x)$ [4]).

(4) Jsou-li $x, y, z \in X$ libovolné body a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná čísla, je

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) . \qquad (12.4)$$

Podmínka (3) vyjadřuje *symetrii* skalárního součinu, podmínka (4) jeho *linearitu* v „první proměnné“. Jejich kombinací získáme *bilinearitu* skalárního součinu, tj. platnost identity

$$(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v) = \alpha\gamma(x, u) + \alpha\delta(x, v) + \beta\gamma(y, u) + \beta\delta(y, v) \qquad (12.5)$$

pro každou čtveřici bodů $x, y, u, v \in X$ a každou čtveřici čísel $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že je v prostoru X zaveden skalární součin a definujme

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} , \quad x \in \mathbb{R} . \qquad (12.6)$$

Tvrdíme, že (12.6) je skutečně norma. Podmínky (1) a (2) z definice normy plynou z vlastností (1) a (2) skalárního součinu. Protože je

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \, \|x\| ,$$

je splněna i podmínka (3). K důkazu trojúhelníkové nerovnosti budeme potřebovat tzv. *Cauchyho nerovnost*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| , \qquad (12.7)$$

platnou pro každé dva body $x, y \in X$. Pak je totiž

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = (x + y, x + y) \; &= \; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) \; \leq \\ \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \; &= \; (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

[4]) Při práci s m-ticemi komplexních čísel nad polem $\mathbb{C}$ má tato podmínka tvar $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

a stačí jen odmocnit nerovnost mezi prvním a posledním výrazem, abychom dostali trojúhelníkovou nerovnost (3) pro normu.
Zbývá dokázat Cauchyho nerovnost (12.7). Ze vztahu

$$0 \le (\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2 \|x\|^2 - 2\alpha(x,y) + \|y\|^2$$

plyne, že polynom (v proměnné α) vpravo má nekladný diskriminant, tj. že $4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$. Odtud plyne $(x,y)^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$, z čehož odmocněním dostaneme Cauchyho nerovnost (12.7).

Úmluva 12.2.1. Je-li na prostoru X zaveden skalární součin, budeme mlčky předpokládat, že je tam zavedena i norma rovností (12.6) a metrika rovností $\varrho(x,y) = \|x - y\|$; budeme mluvit o normě a metrice *indukované* (zavedeným) skalárním součinem.

Užijeme-li označení z (12.2) a položíme-li

$$(x,y) := \sum_{k=1}^{m} x_k\, y_k\,, \tag{12.8}$$

zavedli jsme tím v $\mathbb{A}^m$ skalární součin, protože platnost podmínek (1) – (4) plyne z běžných pravidel elementární algebry. Norma, resp. metrika indukovaná tímto skalárním součinem je pak definována rovností

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{k=1}^{m} |\, x_k\,|^2\Big)^{1/2}, \quad \text{resp.} \quad \varrho_{\,2}(x,y) := \Big(\sum_{k=1}^{m} |\, x_k - y_k\,|^2\Big)^{1/2} \tag{12.9}$$

a nazývají se *eukleidovská norma* a *eukleidovská metrika.* Aritmetický prostor $\mathbb{A}^m$ s touto normou (metrikou) se nazývá *m-rozměrný eukleidovský prostor* a značí se $\mathbb{R}^m$. Je vhodné mít na paměti, že tato metrika je generována normou, vzniklou ze skalárního součinu (12.8).

Do množiny $\mathbb{A}^m$ je často výhodné zavést i jiné normy; můžeme je nazvat *součtová* a *maximová* (rozlišíme je opět indexy, jejichž logika bude později zřejmá):

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m|\,, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}\,. \tag{12.10}$$

Snadné ověření, že jsou to normy, lze přenechat čtenáři. Měření vzdálenosti pomocí příslušných metrik

$$\begin{aligned} \varrho_1(x,y) &:= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_m - y_m|\,, \\ \varrho_{\,\infty}(x,y) &:= \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_m - y_m|\} \end{aligned}$$

popíšeme pro jednoduchost jen pro případ $m = 2$. V obou případech utvoříme úsečky

$$u := \big\{[x_1 + t(y_1 - x_1), x_2]\,;\, t \in [\,0,1\,]\,\big\}\,, \quad v := \big\{[y_1, x_2 + t(y_2 - x_2)]\,;\, t \in [\,0,1\,]\,\big\}\,.$$

Předpokládáme-li, že $x_1 \neq y_1$ a $x_2 \neq y_2$, jsou to úsečky, z nichž první je rovnoběžná s osou x a druhá s osou y, které dohromady tvoří lomenou čáru spojující body $[\,x_1, x_2\,]$a $[\,y_1, y_2\,]$ [5]). Vzdálenost bodů $[\,x_1, x_2\,]$ a $[\,y_1, y_2\,]$ je v případě první z metrik v (12.11) rovna součtu délek úseček u a v, tj. délce lomené čáry, zatímco ve druhém případě z (12.11) je to délka nejdelší z obou úseček.

Definice 12.2.2. Dvě normy p, q na témž lineárním prostoru X se nazývají *ekvivalentní* (v X), existují-li konstanty $C, D \in (0, +\infty)$ tak, že pro všechna $x \in X$ je

$$Cp(x) \le q(x) \le Dp(x)\,. \tag{12.12}$$

Poznámka 12.2.3. Místo „normy p, q jsou ekvivalentní“ budeme často říkat „p je ekvivalentní s q“. Definice je korektní, protože podmínky v ní uvedené jsou vzhledem k p, q symetrické: Platí-li např. (12.12), je $D^{-1}q(x) \le p(x) \le C^{-1}q(x)$, rovněž pro všechna $x \in X$.

Lemma 12.2.4. *Ve vzorci* (12.9) *definovaná eukleidovská norma a normy ze vzorce* (12.10) *jsou na* $\mathbb{A}^m$ *ekvivalentní.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že pro všechna $x = [\,x_1, \dots, x_m\,] \in \mathbb{A}^m$ a pro všechna $k = 1, \dots, m$, platí

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1 \le m \cdot \|x\|_\infty\,. \tag{12.13}$$

První nerovnost plyne ze zřejmé nerovnosti $|x_k| \le \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_m|^2}$, platné pro $k = 1, \dots, m$, přechodem k maximu vzhledem ke k vlevo, druhá je ekvivalentní s evidentní nerovností mezi čtverci obou stran a třetí nerovnost je rovněž jistě zřejmá. $\square$

Poznámka 12.2.5. Ekvivalence norem na $\mathbb{A}^m$ se často používá. Lze dokonce dokázat, že na $\mathbb{A}^m$, či obecněji na každém lineárním prostoru *konečné dimenze*, jsou všechny normy ekvivalentní.

Příklad 12.2.6. Na lineárním (nekonečněrozměrném) prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ lze také definovat normu mnoha způsoby. Seznámíme se s nejdůležitějšími z nich. Pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$ položme

$$\|f\|_\infty := \max\{\,|f(t)|;\ t \in [\,a, b\,]\,\} \tag{12.14}$$

a dokažme, že je to norma na prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Protože podmínky (1) – (3) z Definice 12.1.5 jsou jistě zřejmé, zbývá proto dokázat trojúhelníkovou nerovnost (4). Protože však relace

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

platí pro všechna $x \in [\,a, b\,]$, stačí přejít k maximu vlevo.

[5]) Je-li $x_1 = y_1$ (resp. $x_2 = y_2$), „redukuje se“ úsečka na bod a situace se zjednoduší.

Ukažme nyní, že rovnost

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\ , \tag{12.15}$$

definuje další normu na $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ [6]). Ověřme pro $\|\cdot\|_1$ vlastnosti normy. Jestliže existuje $u \in [\,a,b\,]$ tak, že $|f(u)| =: c > 0$, pak lze nalézt takové kladné číslo $\delta > 0$ a takový bod $v \in (a,b)$, že $\mathcal{U}_\delta(v) \subset [\,a,b\,]$ a zároveň $f(t) > c/2$, $t \in \mathcal{U}_\delta(v)$. Potom

$$\int_a^b |f| = \int_a^{v-\delta} |f| + \int_{v-\delta}^{v+\delta} |f| + \int_{v+\delta}^b |f| \geq \int_{v-\delta}^{v+\delta} c/2 = c\delta > 0\,,$$

z čehož plyne vlastnost (2) této normy. Vlastnost (3) plyne z rovnosti $|c|\big|\,f\big| = \big|\,cf\big|$ a vlastnost (4) z nerovnosti $|f+g| \leq |f| + |g|$ a monotonie integrálu.

Příklad 12.2.7. Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Pro normy z Příkladu 12.2.6 na $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ zřejmě platí pro všechna $t \in [\,a,b\,]$ nerovnost $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$, a tedy

$$\|f\|_1 \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t\ = (b-a)\,\|f\|_\infty\,;$$

Tyto normy však *nejsou* ekvivalentní. Zvolme $[\,a,b\,] = [\,0,1\,]$; nechť f_k je definována tak, že $f_k(t) = 0$ pro $t \in [\,0,1\,] \setminus (1/(k+1), 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$ (doporučujeme čtenáři, aby si načrtl obrázek). V půlícím bodě t_k intervalu $[\,1/(k+1), 1/k\,]$ definujeme $f_k(t_k) = 2(k^2+k)$ a pak dodefinujme f_k lineárně na obou zbývajících intervalech; f_k jsou zřejmě z $\mathcal{C}([\,0,1\,])$ a $\|f\|_1 = 1$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} (\|f_k\|_\infty / \|f_k\|_1) = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty = \lim_{k\to\infty} 2(k^2+k) = +\infty\,,$$

a tedy pro žádné $C < \infty$ *neplatí* pro všechna $k \in \mathbb{N}$ odhad $\|f_k\|_\infty \leq C\,\|f_k\|_1$.

Ucelenější pohled na normy, které jsme dosud definovali, včetně logiky standardního označení pomocí indexů poskytuje následující výklad. Poznamenejme, že se zde přibližujeme těsně k partiím, které jsou předmětem další samostatné matematické disciplíny nazývané *funkcionální analýza*.

Lemma 12.2.8 (Rogers 1888, Hölder 1889*). *Pro každá čísla $p, q \in (0,\infty)$ splňující podmínku $p+q = p\,q$, neboli*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{12.16}$$

a každé dva body $[\,x_1,\dots,x_m\,]$, $[\,y_1,\dots,y_m\,]$ z $\mathbb{A}^m$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^m |\,x_k y_k\,| \leq \Big(\sum_{k=1}^m |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^m |\,y_k\,|^q\Big)^{1/q}\,. \tag{12.17}$$

[6]) Zde jde o „integrální“ normu $\|\cdot\|$. Význam indexu „1“ se čtenáři ozřejmí později.

Důkaz. Je zřejmé, že stačí vyšetřovat případ, kdy všechna čísla x_k a y_k jsou nezáporná a kdy v (12.17) nemusíme psát absolutní hodnoty. Protože nerovnost platí, je-li buď $x_k = 0$ pro všechna k, nebo $y_k = 0$ pro všechna k, předpokládejme, že oba výrazy

$$A := \Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^p\Big)^{1/p}, \quad B := \Big(\sum_{k=1}^{m} y_k^q\Big)^{1/q}$$

jsou kladné. Položíme-li pak $X_k := x_k/A$, $Y_k := y_k/B$, je zřejmě

$$\sum_{k=1}^{m} X_k^p = \sum_{k=1}^{m} Y_k^q = 1\,.$$

Je-li pro nějaké k buď $X_k = 0$ nebo $Y_k = 0$, nerovnost

$$X_k Y_k \le \frac{1}{p}\,X_k^p + \frac{1}{q}\,Y_k^q \tag{12.18}$$

jistě platí. Je-li $X_k, Y_k \in (0,\infty)$, položme $s_k := p\,\log X_k$, $t_k := q\,\log Y_k$ a dokažme, že

$$\exp\Big(\frac{s_k}{p} + \frac{t_k}{q}\Big) \le \frac{1}{p}\,\exp s_k + \frac{1}{q}\,\exp t_k\,. \tag{12.19}$$

Pro $s_k = t_k$ neostrá nerovnost platí, protože s ohledem na (12.16) v ní nastává rovnost. Je-li $s_k \ne t_k$, je vlevo hodnota exponenciály v konvexní lineární kombinaci bodů s_k a t_k a nerovnost (12.19) a s ní ekvivalentní nerovnost (12.18) plyne z konvexity exponenciály.

Sečtením nerovností (12.18) pro $k = 1, 2, \ldots, m$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{m} X_k Y_k \le \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{m} X_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{m} Y_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{12.20}$$

a po evidentní úpravě nerovnost

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \le \Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} y_k^q\Big)^{1/q}, \tag{12.21}$$

kterou jsme měli dokázat. $\square$

Lemma 12.2.9 (Minkowski 1896). *Pro každé p, $1 < p < \infty$, a každé dva body $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,]$, $y = [\,y_1, \ldots, y_m\,]$ z $\mathbb{A}^m$ je*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,y_k\,|^p\Big)^{1/p}.$$

Důkaz. Zřejmě lze předpokládat, že výraz vlevo je kladný, jinak nerovnost zřejmě platí. Vyjdeme z identity

$$(x_k + y_k)^p = x_k(x_k + y_k)^{p-1} + y_k(x_k + y_k)^{p-1}\,.$$

Použijeme trojúhelníkovou nerovnost pro absolutní hodnotu a vzniklé nerovnosti sečteme pro všechna $k = 1, \ldots, m$, čímž obdržíme

$$\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^p \le \sum_{k=1}^{m} |x_k|\,\big|\,x_k + y_k\big|^{p-1} + \sum_{k=1}^{m} |y_k|\,\big|x_k + y_k\big|^{p-1}\,. \tag{12.22}$$

Z Hölderovy nerovnosti (12.21) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} |x_k|\,\big|\,x_k + y_k\,\big|^{p-1} &\le \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\,, \\ \sum_{k=1}^{m} |y_k|\,|\,x_k + y_k\,|^{p-1} &\le \Big(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \end{aligned}$$

a odtud sečtením

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p \le \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^p\Big)^{1/q} \cdot \Big((\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p)^{1/p}\Big)\,. \tag{12.23}$$

Nyní stačí dělit prvým výrazem na pravé straně celou nerovnost (je různý od 0), a s ohledem na $1 - 1/q = 1/p$ dostáváme dokazovanou Minkowského nerovnost. □

V následujícím lemmatu popíšeme další možnost zavedení normy na $\mathbb{A}^m$. Takových norem je dokonce nekonečně mnoho.

Lemma 12.2.10. *Pro všechna $x \in \mathbb{A}^m$, $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,]$, $1 < p < \infty$, definujeme*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\Big)^{1/p}\,. \tag{12.24}$$

Funkce $\|\cdot\|_p$ definovaná na $\mathbb{A}^m$ je norma na $\mathbb{A}^m$.

Důkaz. Vlastnosti normy (1) – (3) jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost pro normu $\|\cdot\|_p$ je vlastně Minkowského nerovnost, takže po přepisu dostáváme

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p\,,$$

což jsme měli dokázat. □

Příklad 12.2.11. Pro každé $x \in \mathbb{A}^m$ platí

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \,. \tag{12.25}$$

Zvolme libovolné $x \in \mathbb{A}^m$; odhad

$$(\|x\|_\infty)^p \le \sum_{k=1}^m |x_k|^p \le m(\|x\|_\infty)^p$$

po umocnění na $1/p$ dává nerovnost

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le m^{1/p}\,\|x\|_\infty \,,$$

ze které plyne (12.25) limitním přechodem pro $p \to \infty$. Nyní je nejen jasné, proč se pro maximovou normu užívá označení $\|\cdot\|_\infty$, ale i to, že normy $\|\cdot\|_p$ jsou pro všechna $p \in (1, +\infty)$ ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_\infty$.

Úmluva 12.2.12. Nyní je již čtenáři jistě jasné, jaký je význam indexů, které jsme používali k rozlišení různých norem na lineárním prostoru A^m. Analogické označení se užívá i pro „integrální případ“, kdy klademe pro $1 \le p < \infty$

$$\|f\|_p := \Big(\int_a^b |f|^p \Big)^{1/p} \,,$$

my jsme se však zmínili pouze o případu $p = 1$ pro prostor $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Poznamenejme, že tak, jako se užívá $\mathbb{R}^m$ pro $(\mathbb{A}^m, \|\cdot\|_2)$, zavádí se označení ℓ^p_m pro $(\mathbb{A}^m, \|\cdot\|_p)$.

Poznámka 12.2.13. Jestliže bychom pracovali s lineárním prostorem všech posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ s reálnými nebo komplexními členy, pro které je $(\sum_1^\infty |x_k|^p)^{1/p} < \infty$, lze na něm podobným způsobem jako v (12.24) definovat normu: Stačí nahradit horní mez u sumy symbolem ∞. Vzniklý normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|_p$ se obvykle značí ℓ^p; v tomto případě se však pracuje s řadami, nikoli s konečnými součty.

12.3 Další pojmy a příklady

Definice 12.3.1. Pro každé dvě množiny $M, N \subset (P, \varrho)$ definujme jejich *vzdálenost* rovností

$$\operatorname{dist}(M, N) := \inf\{\varrho(x, y); x \in M, y \in N\}\,. \tag{12.26}$$

Jsou-li obě množiny neprázdné, je jejich vzdálenost nezáporné číslo. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, je jejich vzdálenost rovna $+\infty$. Pokud $M \cap N \ne \emptyset$, je $\operatorname{dist}(M, N) = 0$, vzdálenost $\operatorname{dist}(M, N)$ však může být rovna 0 i pro M, N disjunktní.

Definice 12.3.2. *Průměr* množiny $M \subset (P, \varrho)$ definujeme podmínkami

$$\operatorname{diam}(M) := \begin{cases} \sup\{\varrho(x,y)\,;\, x,y \in M\}, & \text{je-li } M \neq \emptyset\,, \\ 0\,, & \text{je-li } M = \emptyset\,. \end{cases}$$

Říkáme, že množina $M \subset (P, \varrho)$ je *omezená*, je-li $\operatorname{diam}(M) < \infty$ [7]).

Označení 12.3.3. Je-li jedna z množin M, N jednobodová, rovná $\{x\}$, píšeme místo $\operatorname{dist}(\{x\}, N)$, resp. $\operatorname{dist}(M, \{x\})$ krátce $\operatorname{dist}(x, N)$, resp. $\operatorname{dist}(M, x)$ nebo jen $d(x, N)$, resp. $d(M, x)$. Je-li $\emptyset \neq A \subset P$, nazýváme funkci $d_A(x) := d(x, A)$, $x \in P$, *vzdálenost bodu x od množiny A.*

Příklad 12.3.4. Je-li $X \neq \emptyset$, můžeme na X zavést *diskrétní metriku* ϱ tak, že definujeme $\varrho(x,y) = 0$ pro $x = y$ a $\varrho(x,y) = 1$ pro $x \neq y$, $x, y \in X$. Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá *diskrétní prostor*; je jednoduchým příkladem tzv. ultrametrického prostoru. Metrický prostor nazýváme *ultrametrický*, pokud má jeho metrika ϱ vlastnosti (1) – (3) z Definice 12.1.1 a vlastnost

$$(4") \qquad \varrho(x,y) \le \max\left(\varrho(x,z),\, \varrho(z,y)\right)\,, \quad x, y, z \in X\,.$$

Snadno nahlédneme, že z (4") vyplývá (4), nikoli však naopak: V ultrametrických prostorech platí trojúhelníková nerovnost v zesíleném tvaru. Ultrametrické prostory mají řadu vlastností, které se z hlediska názoru mohou zdát zvláštní až patologické; doporučujeme čtenáři, aby u zaváděných pojmů přihlédl i k tomu, co znamenají v diskrétních prostorech. Bývá to jednoduché a čtenářova představa o smyslu toho kterého pojmu se tím rozšíří. Je např. zřejmé že každý diskrétní prostor (P, ϱ) je omezený, neboť $\operatorname{diam}(P) = 1$.

Příklad 12.3.5. Dokažme nerovnost, ze které později vyplyne, že vzdálenost bodu od množiny $d_A(x)$ je spojitá funkce na P. Nechť $A \neq \emptyset$. Dokážeme nejdříve, že pro každé dva body $x, y \in P$ platí nerovnost

$$d_A(x) \le d_A(y) + \varrho(x,y)\,. \tag{12.27}$$

Důkaz je jednoduchý: v nerovnosti $\varrho(z,x) \le \varrho(z,y) + \varrho(y,x)$, platné pro všechna $x, y, z \in P$, přejděme k infimu přes všechna $z \in A$. Vztah je symetrický v x a y, platí tedy i nerovnost analogická k (12.27), v níž jsou proměnné x a y zaměněny. Z obou těchto nerovností dostáváme

$$|\, d_A(x) - d_A(y)\,| \le \varrho(x,y)\,. \tag{12.28}$$

Definice 12.3.6. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť existuje prosté zobrazení T prostoru P na Q, splňující pro všechna $x, y \in P$ rovnost $\varrho(x,y) = \sigma(T(x), T(y))$. Potom říkáme, že prostor P *je izometrický s Q*. Zobrazení T nazýváme *izometrií prostorů* P a Q. Říkáme dále, že prostory P, Q jsou *izometrické*, jestliže existuje alespoň jedna izometrie prostorů P, Q.

---

[7]) Omezenost zavedl Fréchet v [7] ekvivalentním způsobem, avšak bez pomoci $\operatorname{diam}(M)$.

Poznámky 12.3.7. 1. Definice je korektní, protože vztah je symetrický: Je zřejmě i $\sigma(u,v) = \varrho(T^{-1}(u), T^{-1}(v))$ pro všechna $u, v \in Q$.

2. Gaussova rovina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je izometrická s $\mathbb{R}^2$. Izometrií T zde je zobrazení, které každému $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ přiřadí bod $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Skutečně, jestliže $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, je

$$\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\big)^{1/2}.$$

3. Označíme-li $C_1 := \{z = [x, y] \in \mathbb{C};\ y = 0\}$, je C_1 izometrický s $\mathbb{R}^1$. Podrobněji, podprostor C_1 s metrikou indukovanou z $(\mathbb{C}, \varrho)$ je izometrický s $\mathbb{R}^1$.

4. Je-li T *prosté* zobrazení množiny P do metrického prostoru (Q, σ), lze jednoduše z P vytvořit MP tak, aby T byla izometrie; stačí definovat na P metriku ϱ předpisem

$$\varrho(x, y) := \sigma(T(x), T(y)), \quad x, y \in P.$$

Toto je jedna z cest, pomocí níž lze definovat další MP.

Pojmy invariantní vůči izometrickým zobrazením se nazývají *metrické*. Jsou-li (P, ϱ), (Q, σ) izometrické prostory, mají metrické pojmy v obou prostorech zcela analogické vlastnosti. Každému výroku (definici, větě) v P odpovídá analogický výrok (definice, věta) v Q. Znamená to například, že některá tvrzení stačí dokázat v jednom prostoru a do ostatních s ním izometrických se izometrií „přenesou". Vzhledem k tak velké podobnosti izometrických prostorů se někdy říká, že jde o *tentýž prostor s jiným označením bodů* (srov. $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$).

Příklad 12.3.8. Na prostoru $\mathbb{R}^*$ definujme zobrazení do $\mathbb{R}$

$$T(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1 + |x|}, & \text{je-li } x \in \mathbb{R}, \\ \pm 1, & \text{je-li } x = \pm\infty. \end{cases} \tag{12.29}$$

Snadno nahlédneme, že T je prosté zobrazení $\mathbb{R}^*$ na interval $[-1, 1]$. Za (Q, σ) volme interval $[-1, 1]$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}^1$ a definujme pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$\rho(x, y) = |\, T(x) - T(y)\, |.$$

Tak jsme získali dvojici izometrických prostorů a opatřili $\mathbb{R}^*$ metrikou. V této metrice (patří mezi tzv. *redukované metriky*) je $\mathbb{R}^*$ omezený prostor, protože jeho průměr je 2.

Definice 12.3.9. Je-li $x \in (P, \varrho)$ a $0 < r < \infty$, nazýváme množiny

$$\begin{aligned} B(x, r) &:= \{y \in P;\ \varrho(x, y) < r\}, \\ K(x, r) &:= \{y \in P;\ \varrho(x, y) \le r\}, \\ S(x, r) &:= \{y \in P;\ \varrho(x, y) = r\} \end{aligned} \tag{12.30}$$

postupně po řadě *otevřená koule*, *uzavřená koule* a *sféra o středu x a poloměru r (v prostoru (P, ϱ))*.

Příklad 12.3.10. Rozmyslete si, jaký mají geometrický tvar jednotkové koule v $\mathbb{A}^2$ v metrikách generovaných normami $\|\cdot\|_p$ pro $p = 1, 2, \infty$ (srov. s následujícím Obr. 1). Je snadné si rozmyslit, že v diskrétním prostoru je

$$\begin{aligned} B(x,r) &:= \{x\}\,, \text{ je-li } 0 < r \leq 1\,,\ B(x,r) = P, \quad \text{je-li } r > 1\,,\\ K(x,r) &:= \{x\}\,, \text{ je-li } 0 < r < 1\,,\ K(x,r) = P, \quad \text{je-li } r \geq 1\,,\\ S(x,r) &:= \ \emptyset\,, \quad \text{je-li } r \neq 1\,, \qquad S(x,r) = P \setminus \{x\}, \quad \text{je-li } r = 1\,. \end{aligned} \tag{12.31}$$

Geometrické představy z roviny a trojrozměrného prostoru jsou pohodlnou a často dobrou pomůckou, nelze je však přenášet mechanicky do libovolného MP. Koule o poloměru r a libovolném středu má v $\mathbb{R}^3$ průměr $2r$ a čtenář jistě snadno dokáže, že v obecném prostoru (P, ϱ) platí nerovnost $\operatorname{diam}(K(x,r)) \leq 2r$. Připomeňme, že tato nerovnost může být ostrá: V diskrétním prostoru (Q, σ) dokonce pro každé $x \in Q$ je

$$\operatorname{diam}(K(x, 1/2)) = 0 < 1/2\,,$$

takže průměr koule může být menší než její poloměr.

Doporučujeme čtenáři uvážit, že např. má-li diskrétní prostor nekonečně mnoho různých bodů, potom pro libovolné $a \in P$ sféra $S(a,1)$ obsahuje nekonečně mnoho otevřených koulí o středech z $P \setminus \{a\}$ a poloměru $r = 1$, přičemž všechny tyto koule jsou navzájem disjunktní. Podobná překvapení skýtají všechny ultrametrické prostory.

Ekvivalenci norem si můžeme představit tak, že kouli $K(0,1)$ v uvažovaném prostoru lze vepsat $K_1(0, r_1)$ a opsat $K_2(0, r_2)$, kde koule K_1,K_2 jsou definovány pomocí ekvivalentní normy. Viz Obr. 1, který názorně ilustruje ekvivalenci norem z Lemmatu 12.2.4 pro případ prostoru $\mathbb{R}^2$:

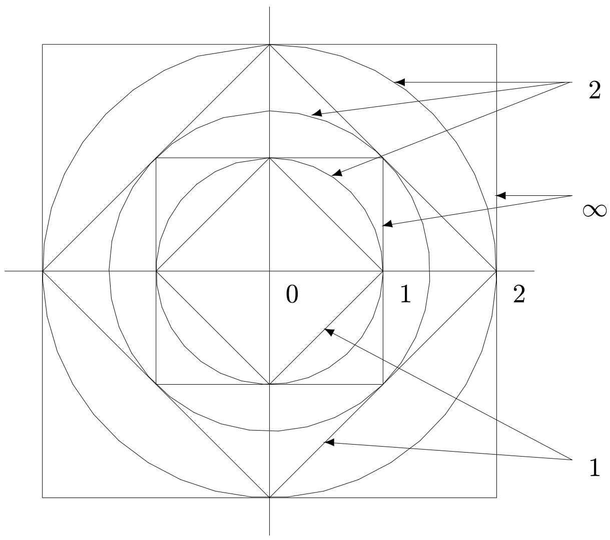

Schéma norem
v prostoru $\mathbb{R}^2$

Obr. 1

Z obrázku snadno vyčteme (u šipek uvádíme indexy norem) inkluze pro jednotkové koule v normách $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_1$. Srovnejte s (12.13). Všimněte si, že např. nejmenší koule v normě $\|\cdot\|_1$, obsahující jednotkovou kouli v normě $\|\cdot\|_\infty$, má poloměr rovný 2.

Definice 12.3.11 (Weierstrass 1860). Množina $G \subset (P, \varrho)$ se nazývá *otevřená* (v prostoru (P, ϱ)), jestliže pro každé $x \in G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset G$.

Historická poznámka 12.3.12. Na formování tohoto pojmu se podíleli i Richard Julius Wilhelm Dedekind (1831 – 1916) prací z r. 1871 a Cantor prací z r. 1879.

Definice 12.3.13 (Cantor 1879). Množina $F \subset (P, \varrho)$ se nazývá *uzavřená* (v prostoru (P, ϱ)), je-li množina $P \setminus F$ otevřená.

Poznámky 12.3.14. 1. Otevřená koule $B(x, r) \subset (P, \varrho)$ je vždy otevřená množina; k tomu stačí uvážit, že pro každé $y \in B(x, r)$ je $B(y, r_1) \subset B(x, r)$, pro všechna r_1 splňující nerovnosti $0 < r_1 < r - \varrho(x, y)$.

2. Uzavřená koule $K(x, r)$ je vždy uzavřená množina, protože z nerovnosti $\varrho(x, y) > r$ plyne, že $B(y, r_1) \cap K(x, r) = \emptyset$ pro všechna r_1, $0 < r_1 < \varrho(x, y) - r$.

3. V diskrétním prostoru a dokonce obecněji, ve všech ultrametrických prostorech, je např. $K(x, r)$ i otevřená a $B(x, r)$ i uzavřená množina. Jsou to tedy množiny *současně* otevřené i uzavřené; nazýváme je proto *obojetné* množiny. V diskrétním prostoru jsou dokonce *všechny* množiny obojetné.

4. Z Definice 12.1.3 je zřejmé, co je otevřená koule nebo otevřená množina v $M \subset (P, \varrho)$. Závorka v definici otevřené a uzavřené množiny ukazuje, kterou část definice zpravidla v běžné řeči vynecháváme. Je-li obecněji $M \subset P$, pak podle Úmluvy 12.1.4 víme, co je *množina otevřená v* M, v tom případě ale část „v $M \subset (P, \varrho)$“ nebo alespoň „v M“, vynechat *nesmíme*. Později v Lemmatu 13.3.2 podáme charakteristiku otevřených množin v M pomocí otevřených množin (v (P, ϱ)).

Definice 12.3.15 (Cantor 1872). *Okolím bodu* x v prostoru (P, ϱ) rozumíme

(1) v užším smyslu otevřenou kouli $B(x, r), r > 0$,

(2) v širším smyslu (což budeme užívat častěji) jakoukoliv otevřenou množinu $G \subset P$ obsahující bod $x \in G$ [8]).

Poznamenejme, že na podobnou situaci jsme zvyklí z $\mathbb{R}^1$, kde jsme pracovali se symetrickými okolími $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ bodu x a okolími $\mathcal{U}(x)$ bodu x.

Definice 12.3.16. Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ bodů prostoru (P, ϱ) *konverguje k bodu* $x \in (P, \varrho)$, je-li $\varrho(x_n, x) \to 0$ (pro $n \to \infty$); je-li zřejmé, ve kterém prostoru pracujeme, píšeme krátce $x_n \to x$. Čtenář snadno nahlédne, že podmínka $x_n \to x$

[8]) Hausdorff dospěl r. 1914, v první knize o topologii, již k obecnějšímu pojetí okolí.

je ekvivalentní s každou z následujících podmínek:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(\varrho(x_n, x) < \varepsilon)\,,$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(x_n \in B(x, \varepsilon))\,.$$

Existuje-li $x \in P$ tak, že $x_n \to x$, říkáme, že *posloupnost* $\{x_n\}$ *konverguje v* P (nebo že *je v* P *konvergentní*); pokud takový bod $x \in P$ neexistuje, říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ *v* P *diverguje* (nebo že *je v* P *divergentní*).

Poznámky 12.3.17. 1. Všimněme si, že pro $x, y \in (P, \rho)$ a členy posloupnosti $\{x_n\}$ z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)\,,$$

a tedy že z $x_n \to x$ a $x_n \to y$ pro $n \to \infty$ vyplývá $x = y$; limita posloupnosti bodů v (P, ρ) je určena jednoznačně.

2. V této fázi výkladu by již mělo být zřejmé, že značnou část úvah, které jsme již jednou dělali pro speciální případ, opakujeme. Velmi často „přenášíme pojmy“ z $\mathbb{R}^1$ do obecnějšího kontextu a snažíme se pro ně dokázat tvrzení podobná těm, která již z $\mathbb{R}^1$ známe. Přitom však látku nejen zobecňujeme, ale i prohlubujeme.

Příklad 12.3.18. Pro každou posloupnost bodů $\{x^{(n)}\} = \{[\,x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\,]\}$ bodů z A^m a $x = [\,x_1, x_2 \ldots, x_m\,] \in A^m$ je pro všechna k zřejmě

$$|\,x_k^{(n)} - x_k\,| \leq \|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \|x^{(n)} - x\|_s = \sum_{k=1}^{m} |\,x_k^{(n)} - x_k\,|\,, \tag{12.32}$$

z čehož plyne ekvivalence

$$(\varrho_m(x^{(n)}, x) = \|x^{(n)} - x\|_\infty \to 0) \iff (|\,x_k^{(n)} - x_k\,| \to 0 \text{ pro všechna } k = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Konvergence v A^m v eukleidovské normě (a ve všech normách s ní ekvivalentních) je „konvergence po souřadnicích“.

Tvrzení 12.3.19. *Označme* $\mathcal{G}(P)$ *systém všech otevřených podmnožin metrického prostoru* (P, ϱ)*. Potom platí:*

(1) $\emptyset, P \in \mathcal{G}(P)$,

(2) *je-li* $A \neq \emptyset$ *libovolná množina a* $G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$ *pro každé* $\alpha \in A$, *je* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$,

(3) *je-li* $A \neq \emptyset$ konečná *množina a* $G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$ *pro každé* $\alpha \in A$, *je* $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$.

Důkaz. Tvrzení (1) je triviálním důsledkem definice otevřené množiny. Jestliže je $x \in G := \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, existuje $\alpha \in A$ tak, že $x \in G_\alpha$; protože G_α je otevřená množina, existuje okolí $\mathcal{U}(x) \subset G_\alpha$ a tedy i $\mathcal{U}(x) \subset G$. Tím je tvrzení v (2) dokázáno.

Stačí dokázat třetí část tvrzení: Označíme-li nyní $G := \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcap_1^n G_{\alpha_k}$ a budeme-li předpokládat, že $x \in G$, existují čísla $r_k > 0$ tak, že $B(x, r_k) \subset G_{\alpha_k}$ pro $k = 1, \dots, n$; pro $r := \min\{ r_1, \dots, r_n \}$ leží okolí $B(x, r)$ v G. Tím je dokázáno i tvrzení (3). □

Poznámka 12.3.20. V každém metrickém prostoru (P, ϱ) lze (pomocí otevřených koulí, tedy konec konců pomocí metriky ϱ) definovat otevřené množiny a tak utvořit systém $\mathcal{G}(P)$ všech jeho otevřených podmnožin; tento systém se nazývá *topologie* prostoru (P, ϱ) a tvrzení (1) – (3) popisují jeho základní vlastnosti.

Zobecněním metrických prostorů jsou *prostory topologické*, definované jako dvojice (P, τ), kde $P \neq \emptyset$ je množina a τ nějaký systém jejích podmnožin, který splňuje podmínky analogické těm, které popisují (1) – (3). Říkáme pak, že systém τ je *topologie* prostoru (P, τ) a že množiny $G \in \tau$ jsou *otevřené množiny* prostoru (P, τ).

Otevřené podmnožiny metrického prostoru (P, ϱ) jsou (jednoznačně) určeny jeho metrikou. V případě topologického prostoru (P, τ) *definujeme* otevřené množiny výběrem systému τ; tento výběr je podřízen pouze trojici podmínek:

(1) $\emptyset, P \in \tau$;

(2) je-li $A \subset \tau$ *libovolný* podsystém systému τ, leží sjednocení všech jeho elementů v τ;

(3) je-li $A \subset \tau$ jakýkoli *konečný* podsystém systému τ, leží průnik všech jeho elementů v τ.

Poznamenejme, že v obecnějších topologických prostorech platí řada tvrzení, která se dokazují zpravidla jen pro prostory metrické. Definujeme-li např. v *topologickém prostoru* uzavřené množiny stejně jako v prostorech metrických, tj. jako doplňky množin otevřených, můžeme dokázat jejich tři základní vlastnosti i v obecnějších topologických prostorech stejně snadno, jako v MP.

Poznamenejme ještě, že pomocí vlastností tohoto „duálního“ systému všech uzavřených množin lze opět topologii *definovat.*

Tvrzení 12.3.21. *Systém $\mathcal{F}(P)$ všech uzavřených podmnožin prostoru P [9]) má tyto tři základní vlastnosti:*

(1) $\emptyset, P \in \mathcal{F}(P)$*;*

(2) *je-li $A \subset \tau$* libovolný *podsystém systému $\mathcal{F}(P)$, leží průnik všech jeho elementů v $\mathcal{F}(P)$;*

(3) *je-li $A \subset \tau$* konečný *podsystém systému $\mathcal{F}(P)$, leží sjednocení všech jeho elementů v $\mathcal{F}(P)$.*

---

[9]) Metrického, nebo obecněji topologického.

Důkaz. Protože $\emptyset, P$ jsou doplňky otevřených množin $P, \emptyset$, platí (1). Důkaz tvrzení (2) a (3) této věty se provede pomocí de Morganových pravidel (vzorec (1.3) z Kapitoly 1) a podmínek (2) a (3) z Tvrzení 12.3.19. Jsou-li množiny F_α, $\alpha \in A$, uzavřené, jsou jejich doplňky $G_\alpha := P \setminus F_\alpha$ otevřené, přičemž

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (P \setminus G_\alpha) = P \setminus \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha\,; \tag{12.33}$$

protože poslední sjednocení je otevřená množina, je její doplněk množina uzavřená. Tím je dokázáno tvrzení (2). Platnost tvrzení (3) se ověří zcela analogicky. □

Poznámka 12.3.22. Přechod od průniku uzavřených množin ke sjednocení jejich doplňků v (12.33) budeme často užívat při důkazech tvrzení o MP, často tak dostaneme jednoduše bez větší námahy další zajímavá tvrzení.

Definice 12.3.23. Je-li $M \subset (P, \rho)$, nazveme bod $x \in P$

(1) *vnitřním bodem* množiny M, existuje-li $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset M$, tj. jestliže $M \cap B(x, r) = B(x, r)$;

(2) *hromadným bodem* množiny M, když pro každé $r > 0$ je množina $M \cap B(x, r)$ nekonečná;

(3) *hraničním bodem* množiny M, když je současně hromadným bodem množin M i $P \setminus M$;

(4) *izolovaným bodem* množiny M, existuje-li $r > 0$ tak, že $M \cap B(x, r) = \{x\}$;

(5) *vnějším bodem* množiny M, existuje-li $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset P \setminus M$, tj. jestliže $M \cap B(x, r) = \emptyset$;

(6) *limitním bodem* množiny M, když existuje posloupnost $\{x_k\}$ bodů z M tak, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Poznámky 12.3.24. 1. Některé pojmy zavedené v Definici 12.3.23 nemají velkou samostatnou důležitost a lze je lehce popsat jiným způsobem: Bod x je vnějším bodem množiny M, právě když je vnitřním bodem jejího komplementu.

2. Je-li bod x izolovaným bodem množiny M, je vnitřním bodem M v podprostoru $(M, \rho\,|\,M \times M)$.

3. Bod x množiny M je vždy jejím limitním bodem, ale pokud je hromadným bodem, existuje k němu *prostá* posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \to x$; izolovaný bod x množiny M je limitou posloupnosti bodů $x_k \in M$, právě když je $\{x_k\}$ skoro konstantní (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\{x_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní posloupnost).

4. Analogických vztahů mezi různými typy bodů v závislosti na M je mnoho, čtenář jistě některé další dokáže samostatně popsat. Důležitější jsou však množiny, které lze pomocí těchto bodů definovat a vztah těchto množin k množině M.

Definice 12.3.25. Množina všech vnitřních bodů množiny M tvoří *vnitřek* M° množiny M, množina všech vnějších bodů M tvoří *vnějšek* $\underline{M}$. Množina všech hraničních bodů M je *hranice* ∂M množiny M. Množina $\overline{M} := M \cup \partial M$ se nazývá *uzávěr* množiny M. Množinu M' všech hromadných bodů množiny M nazýváme někdy derivací množiny M.

Poznámky 12.3.26. Některé vztahy mezi zavedenými pojmy jsou zřejmé, jiné lze velmi snadno dokázat. Tak například zřejmě platí:

1. Pro každou $A \subset (P, \rho)$ je $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$;
2. Je-li $A \subset B \subset (P, \rho)$, je $A^\circ \subset B^\circ$ a $\overline{A} \subset \overline{B}$;
3. Je $\partial A = \partial(P \setminus A)$ pro každou $A \subset (P, \rho)$, a tedy $\partial A \subset \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$.
4. Pro každou *konečnou* množinu $A \subset (P, \rho)$ je $A' = \emptyset$;
5. Je $\overline{A} = A \cup A'$, protože $x \in P \setminus A$ leží v ∂A, právě když $x \in A'$.

Tvrzení 12.3.27. *Množina $A \subset (P, \rho)$ je otevřená, právě když je $A^\circ = A$. Množina $A \subset (P, \rho)$ je uzavřená, právě když je $A = \overline{A}$.*

Důkaz. Množina A je otevřená, právě když je každý její bod vnitřním bodem A, neboli $A = A^\circ$. Množina A je uzavřená, je-li její kompement $P \setminus A$ otevřená množina, a tedy žádný bod $P \setminus A$ není bodem hraničním. Proto $\partial A \cap (P \setminus A) = \emptyset$, a tedy $\partial A \subset A$, neboli $\overline{A} \subset A$; obrácená inkluze je zřejmá. Naopak při $A = \overline{A}$ je $\partial A = \partial(P \setminus A) \subset A$, takže všechny body $P \setminus A$ jsou vnitřní, $P \setminus A$ je otevřená, a tedy A je uzavřená. □

Tvrzení 12.3.28. *Množina A° je největší (ve smyslu inkluze) otevřenou podmnožinou A. Množina $\overline{A}$ je nejmenší (ve smyslu inkluze) uzavřenou nadmnožinou A. Je tedy*

$$A^\circ := \bigcup \{G;\ G \subset A,\ G \in \mathcal{G}(P)\}\,, \quad \overline{A} := \bigcap \{F;\ A \subset F,\ F \in \mathcal{F}(P)\}\,. \tag{12.34}$$

Důkaz. Je-li x vnitřní bod množiny M, existuje otevřená koule $B(x, r_x) \subset M$ a

$$A^\circ \subset \bigcup \{\, B(x, r_x)\,;\ x \in A^\circ \,\} \subset \bigcup \{\, G\,;\ G \subset A,\ G \in \mathcal{G}(P) \,\} \subset A^\circ\,, \tag{12.35}$$

a proto lze všechny inkluze v předcházejícím vztahu nahradit rovnostmi. Předposlední množina v (12.35) je zřejmě nějvětší otevřená podmnožina A.

Komplementem každé uzavřené množiny F, $A \subset F$, je otevřená množina $G \subset (P \setminus A)$, přičemž největší z nich je $(P \setminus A)^\circ$. Dále zřejmě je

$$\overline{A} = A = P \setminus (P \setminus A) = P \setminus (P \setminus A)^\circ\,, \tag{12.36}$$

což dává druhou část tvrzení. □

Poznámky 12.3.29. 1. To, že se dříve uzávěr A někdy nazýval *uzavřený obal* A, osvětluje (12.34). Z tohoto tvrzení též plyne

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}\,, \quad (A^\circ)^\circ = A^\circ\,.$$

2. Z rovností (12.36) snadno obdržíme přechodem ke komplementům

$$P \setminus \overline{A} = (P \setminus A)^\circ\,, \quad P \setminus A^\circ = \overline{(P \setminus A)}\,. \tag{12.37}$$

Věta 12.3.30. *Uzávěr $\overline{A}$ množiny A v (P, ρ) je roven množině všech limitních bodů A, tj.*

$$\overline{A} = \{\, x \in P\,;\ \textit{existují } x_k \in A,\ k \in \mathbb{N},\ \textit{tak, že } x_k \to x \,\}$$

Důkaz. Každý bod $x \in \overline{A}$ je buď z A a je limitou konstantní posloupnosti se členy $x_k = x$, nebo je hraničním bodem neležícím v A, ale pak je z A' a je dokonce limitou prosté posloupnosti bodů z A. Není-li $x \in \overline{A}$, leží podle (12.37) v $(P \setminus A)^\circ = P \setminus \overline{A}$, čímž je tvrzení dokázáno. □

Důsledek 12.3.31. *Množina $A \subset (P, \varrho)$ je uzavřená, právě když platí:*

$$(x_n \in A\,,\ x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)\,. \tag{12.38}$$

Důkaz. Podle vyjádření uzávěru z Tvrzení 12.3.30 plyne z podmínky (12.38) inkluze $\overline{A} \subset A$, a je tedy $\overline{A} = A$ (druhá inkluze je triviální). Zbytek je důsledkem Tvrzení 12.3.30. □

Příklad 12.3.32. Omezený prostor $\mathbb{R}^*$ z Příkladu 12.3.8 má za podprostor $\mathbb{R}^1$. Označíme-li jeho metriku σ a ϱ eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}$, snadno nahlédneme, že interval (a, b), $-\infty < a < b < \infty$, je otevřenou množinou v obou prostorech a že topologie v obou prostorech jsou tvořeny stejnými systémy (otevřených) množin, i když z hlediska metrik se prostory výrazně liší, neboť jeden je omezený a druhý nikoli.

Tvrzení 12.3.33. *Pro každou $M \subset (P, \varrho)$ je množina ∂M uzavřená množina. Dále platí*

$$\partial M = \overline{M} \cap \overline{P \setminus M} = \overline{M} \cap (P \setminus M^\circ) = \overline{M} \setminus M^\circ\,. \tag{12.39}$$

Důkaz. S přihlédnutím k Poznámce 12.3.26 (3) a ke vztahům (12.37) stačí dokázat inkluzi $\overline{M} \setminus M^\circ \subset \partial M$. Bod $x \in \overline{M} \setminus M^\circ$ je však limitním bodem M, který není vnitřním bodem M, je tedy i limitním bodem $P \setminus M$, leží tedy v ∂M, čímž je důkaz dokončen. □

Historická poznámka 12.3.34. Pojem hranice množiny se postupně vyvíjel; k vývoji přispěli zejména Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) prací z r. 1861, Richard Dedekind (1831 – 1916) (1871), Giuseppe Peano (1858 – 1932) (1887) a Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922) (1893).

Tvrzení 12.3.35 (Fréchet 1906). *Množina $M \subset (P,\varrho)$ je uzavřená v (P,ϱ), právě když $M' \subset M$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, M je uzavřená množina. Je-li x hromadný bod množiny M, existuje posloupnost bodů $x_n \in M$, $x_n \neq x$, konvergující k bodu x. Z Důsledku 12.3.31 plyne $x \in \overline{M} = M$, takže $M' \subset M$. Již jsme ukázali, že existuje-li posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M tak, že $x_n \to x \notin M$, pak pro žádné $r > 0$ neplatí $B(x,r) \subset P \setminus M$, takže M není uzavřená množina; snadno je však vidět, že $x \in M'$, a tedy neplatí ani $M' \subset M$. □

Tvrzení 12.3.36 (Fréchet 1906). *Nechť (P,ϱ) je MP, $M \subset P$. Potom množina M' všech hromadných bodů M je uzavřená v P.*

Důkaz. Podle definice hromadného bodu je $x \in P \setminus M'$, právě když existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{P}(x,r) := (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$. Pak je však množina $B(x,r) \cap M$ jednobodová a x je izolovaný bod M, nebo je $B(x,r) \cap M$ prázdná. V obou případech je $B(x,r) \cap M'$ prázdná, a tedy $P \setminus M'$ je otevřená množina, což dává tvrzení. □

Poznámka 12.3.37. Mezi pojmy, které jsme zavedli, existuje celá řada souvislostí, zdaleka jsme nepopsali všechny. Tak např. z rovností, které jsou důsledkem (12.37), plyne

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A} = (P \setminus (P \setminus A)^\circ) \cap (P \setminus A^\circ) = P \setminus ((P \setminus A)^\circ \cup A^\circ)\,,$$

takže při $A \subset (P,\rho)$ se P rozpadá na tři disjunktní části: A°, ∂A a $(P \setminus A)^\circ$. Jiné souvislosti jsou důležitými důkazovými prostředky nebo umožňují lepší pochopení pojmů. Pro procvičení by se měl čtenář po prostudování této kapitoly sám pokusit nějakou další souvislost objevit a dokázat.

Příklad 12.3.38. Zamyslíme-li se nad oběma metrikami z Příkladu 12.3.32 a jejich splývajícími topologiemi, vidíme, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k témuž bodu $x \in \mathbb{R}$ v obou prostorech, nebo v obou prostorech diverguje.

Znamená-li ϱ a σ totéž co v Příkladu 12.1.13, je pro každou posloupnost bodů $x_n \in P$ a každý bod $x \in P$ podmínka $\varrho\,(x_n,x) \to 0$ ekvivalentní s podmínkou $\varrho\,(x_n,x) \to 0$; zabýváme-li se jen těmito dvěma metrikami v P, lze psát $x_n \to x$ bez vysvětlení, zdali je konvergence myšlena při metrice ϱ nebo při metrice σ.

Přitom je situace trochu odlišná, než u ekvivalentních norem. Z definičního vztahu

$$\sigma(x,y) = \varrho(x,y)/(1+\varrho(x,y))\,, \quad x,y \in P$$

plyne $\sigma(x,y) \le \varrho\,(x,y)$. Jestliže však není metrika ϱ omezená na $P \times P$, pak pro žádné C, $0 < C < 1$, neplatí $C\varrho\,(x,y) \le \sigma(x,y)$. Pro každé $x \in P$ však platí

$$(1/2)\varrho(x,y) \le \sigma(x,y) \le \varrho(x,y) \tag{12.40}$$

pro ta $y \in P$, pro která je $\varrho(x,y) \le 1$ [10]); k tomu stačí zjistit, pro která $x \in [\,0,\infty)$ platí $x/2 \le x/(1+x)$. Je užitečné si povšimnout, že i když by byla metrika ϱ

[10]) Vztah (12.40) neplatí pro *všechna* $x,y \in P$!

generována normou, metrika σ z ní vytvořená tuto vlastnost nemá. Příklad nás motivuje k následující definici.

Definice 12.3.39. Říkáme, že metriky ϱ a σ jsou v prostoru P ekvivalentní, platí-li pro každou posloupnost bodů $x_n \in P$ a každé $x \in P$ ekvivalence

$$\lim x_n = x \text{ v } (P, \varrho) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim x_n = x \text{ v } (P, \sigma)\,. \tag{12.41}$$

Potom říkáme, že ϱ, σ jsou *ekvivalentní metriky* na P.

Cvičení 12.3.40. Dokažte, že pro každou spojitou rostoucí funkci $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce

$$\sigma(x,y) := |\,T(x) - T(y)\,|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

metrika ekvivalentní s eukleidovskou metrikou.

Příklad 12.3.41. Označme s množinu všech posloupností reálných čísel, ve které je sčítání posloupností a násobení posloupností číslem definováno „po souřadnicích“. Pak je s zřejmě lineární prostor. Pro každé dva jeho elementy $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$ položme

$$\varrho(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\,x_k - y_k\,|}{1 + |\,x_k - y_k\,|}\,, \quad x, y \in s\,.$$

Potom je ϱ metrika na s. Poznamenejme především, že řada vpravo konverguje, protože $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ je její konvergentní majoranta. Nezáporný výraz $\varrho(x,y)$ je roven 0, právě když je každý z nezáporných sčítanců vpravo roven 0, tj. právě při $x = y$. Protože symetrie je zřejmá, stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost. ověření ostatních vlastností metriky je lehké. S ohledem na Příklad 12.1.13 platí speciálně pro všechna $x_k, y_k, z_k \in \mathbb{R}$

$$\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \le \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Nyní stačí nerovnosti postupně násobit faktorem 2^{-k} a sečíst od $k = 1$ do ∞.

I když je ϱ metrika na lineárním prostoru, není generována *žádnou normou* na s. To je snadný důsledek Poznámky 12.1.8, pro vzdálenost konstantní posloupnosti $\{x_k\}$, $x_k = 5$, od počátku dostáváme

$$\varrho(\{5\},\{0\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{5}{1+5} = \frac{5}{1+5} \ne 5 = 5\varrho(\{1\},\{0\})\,.$$

Ukažme ještě, že konvergence v (s, ϱ) je, podobně jako v A^m (viz Příklad 12.3.18) konvergencí po souřadnicích, tj. *pro každou posloupnost bodů* $x^{(n)}$ *z* s, $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$ *a každý bod* $x = \{\,x_k\} \in s$ *je*

$$(\lim_{n\to\infty} \varrho_m(x^{(n)}, x) = 0) \iff (\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \textit{ pro všechna } k \in \mathbb{N})\,. \tag{12.42}$$

Abychom nemuseli psát zbytečně složité výrazy, označme V levou stranu a W pravou stranu ekvivalence (12.42). Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{|\,x_k^{(n)} - x_k\,|}{1 + |\,x_k^{(n)} - x_k\,|} \le 2^k \varrho(x^{(n)}, x)\,,$$

plyne z výroku V výrok W. Obráceně, jestliže je dáno $\varepsilon > 0$, zvolme $p \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$. Z výroku W plyne existence takového indexu n_0, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $k = 1, 2, \ldots, p$ je

$$|\, x_k^{(n)} - x_k \,| < \frac{\varepsilon}{2p}$$

Potom však je zřejmě

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\, x_k^{(n)} - x_k \,|}{1 + |\, x_k^{(n)} - x_k \,|} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \frac{|\, x_k^{(n)} - x_k \,|}{1 + |\, x_k^{(n)} - x_k \,|} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\, x_k^{(n)} - x_k \,|}{1 + |\, x_k^{(n)} - x_k \,|} <$$

$$< \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon}{2p} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

pro všechna $n > n_0$. Z výroku W plyne tedy výrok V, a tím je ekvivalence (12.42) dokázána.

Příklad 12.3.42. Nechť $A \neq \emptyset$ a $\mathcal{M}(A)$ je množina všech *omezených* funkcí definovaných na množině A. Vzhledem k „bodově“ definovaným standardním operacím je to zřejmě lineární prostor. Položme pro každé $f \in \mathcal{M}(A)$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|;\ t \in A\}\,.$$

a dokažme, že jde skutečně o normu; říká se jí obvykle *supremová*. Všechny ostatní vlastnosti normy jsou evidentní, stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost. K tomu stačí vyjít z nerovnosti

$$|\,(f+g)(t)\,| \leq |\,f(t)\,| + |\,g(t)\,|$$

platné pro každé $t \in A$ a přejít k supremu nejdřive vpravo a pak vlevo. Konvergence v metrice $\varrho(x,y) = \|x - y\|_\infty$, generované touto normou, hraje v matematické analýze velmi důležitou úlohu; nazývá se *stejnoměrná konvergence.*

Položíme-li $A := [\,a, b\,]$, získáme důležitý prostor $M([\,a, b\,])$, jehož podprostorem je prostor $\mathcal{C}([\,(, a\,])(b))$, ve kterém lze v definici normy nahradit supremum maximem.

Příklad 12.3.43. Obě normy, zavedené v Příkladu 12.2.6 na $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ lze velmi jednoduše srovnat v následujícím smyslu: připomeňme, že platí

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sup\{|f(x)|;\ x \in [\,a, b\,]\}\,\mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_\infty\,.$$

Odtud plyne, že posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$ konvergentní v normě $\|\cdot\|_\infty$ konverguje i v normě $\|\cdot\|_1$. S metrikou odvozenou od normy $\|\cdot\|_1$ jsme se již jednou setkali při vyšetřování Riemannova integrálu v Poznámce 11.2.37, resp. ve vztazích (11.28) a (11.29).

Dá se ukázat, že definice všech základních pojmů, které jsme v této části kapitoly zavedli, by bylo možné vyslovit jak pomocí okolí, tak pomocí limit posloupností. Nežli se budeme zabývat v další kapitole MP se speciálními vlastnostmi, ukážeme si, jak se v MP pracuje s konvergencí a se spojitostí. Dokážeme o ní několik užitečných tvrzení.

12.4 Spojitost

Označme pro $x \in (P, \varrho)$ množinu všech $B(x, r) \subset P$ symbolem s $\mathcal{B}_x$ a množinu všech otevřených $G \subset P$ obsahujících bod x symbolem $\mathcal{G}_x$; jsou to tedy všechna okolí bodu x v užším a širším smyslu.

Definice 12.4.1. Řekneme, že zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je *spojité v bodě* $x \in P$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in B(x, \delta))(f(y) \in B(f(x), \varepsilon)) . \tag{12.43}$$

Snadno nahlédneme, že stejně jako v $\mathbb{R}$ můžeme použít ekvivalentních vyjádření: pro každé okolí $\mathcal{U}(f(x))$ bodu $f(x)$ existuje okolí $\mathcal{V}(x)$ bodu x tak, že je $f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))$, resp. pro každou posloupnost $\{x_n\}$ bodů x_n z P, pro niž $x_n \to x \in P$, je $f(x_n) \to f(x)$. Logickými symboly vyjádřeno jde o podmínky

$$(\forall \mathcal{U}(f(x)) \in \mathcal{G}_{f(x)})(\exists \mathcal{V}(x) \in \mathcal{G}_x)(f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))) , \tag{12.44}$$

$$(x_n \in P\,,\ x_n \to x \in P) \Longrightarrow (f(x_n) \to f(x)) . \tag{12.45}$$

nebo, i když trochu nepřesně

$$(\forall \mathcal{U}(f(x)))(\exists \mathcal{V}(x))(f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))).$$

Ukažme např., že je jedno, zda pracujeme s „kulovými“ okolími z $\mathcal{B}_x$ nebo obecnými otevřenými množinami z $\mathcal{G}_x$, tj. že podmínky (12.43) a (12.44) jsou ekvivalentní: Je-li splněna podmínka (12.44), existuje speciálně k okolí $B(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{B}_{f(x)}$ *otevřená* množina $\mathcal{V}(x)$ obsahující $B(x, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ tak, že platí inkluze $f(B(x, \delta)) \subset f(\mathcal{V}(x)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Je-li splněna podmínka (12.43), postupujeme takto: Zvolme $\mathcal{U}(f(x)) \in \mathcal{G}_{f(x)}$. Dále zvolíme $B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{U}(f(x))$ a k této množině najdeme dle(12.43) $B(x, \delta)$ tak, aby $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Položíme $B(x, \delta) = \mathcal{V}(x)$ a dostaneme

$$f(\mathcal{V}(x)) = f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{U}(f(x)) .$$

Definice 12.4.2. Říkáme, že zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je *spojité* (na P), jestliže je spojité v každém bodě $x \in P$.

12.5 Topologické pojmy

Definice 12.5.1. Nechť zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je spojitá bijekce a inverzní zobrazení f^{-1} je také spojité. Potom říkáme, že f je *homeomorfismus mezi prostory P, Q*. Říkáme dále, že (P, ϱ), (Q, σ) jsou *homeomorfní*, existuje-li mezi (P, ϱ), (Q, σ) homeomorfismus.

Poznámky 12.5.2. 1. Pojmy, které se přenášejí (zachovávají) homeomorfismy, nazýváme *topologické*. Tak např. otevřenost množiny se při zobrazení homeomorfním zobrazením zachovává, jde tedy o topologický pojem. Omezenost metrického prostoru se homeomorfismem zachovat nemusí; viz Příklad 12.1.13. Tento pojem proto není topologický. Jak již víme, pojmy či vlastnosti, které se zachovávají izometriemi, se nazývají *metrické*. Izometrické prostory jsou zřejmě homeomorfní, avšak homeomorfní prostory nemusí být izometrické. Homeomorfismus je typickým pracovním nástrojem pro práci v *topologických* prostorech. Každá topologická vlastnost je i vlastností metrickou, nikoli však obráceně.

2. Homeomorfní obraz *diskrétního prostoru* je složen ze samých izolovaných bodů. Topologii takového prostoru tvoří systém všech jeho podmnožin, neboli všechny jeho podmnožiny jsou otevřené (a zároveň i uzavřené).

3. Interval $[0,1]$ s eukleidovskou metrikou je homeomorfní s $\mathbb{R}^*$, pokud zavedeme na $\mathbb{R}^*$ metriku postupem z Poznámky 12.3.7.

4. Je-li identické zobrazení homeomorfismem mezi prostory (P,ϱ) a (P,σ), jsou metriky ϱ a σ ekvivalentní metriky na P. Obráceně: Jsou-li ϱ a σ dvě ekvivalentní metriky na P, je identické zobrazení (P,ϱ) a (P,σ) homeomorfismem.

5. Pojmy, které jsou metrické, avšak nikoli topologické, mohou být přesto velmi důležité. Např. pojem stejnoměrné spojitosti, kterým se budeme dále zabývat, *není* topologickým pojmem.

I když dále pojem topologického prostoru nerozvíjíme, postupujeme tak, aby pro čtenáře nebylo obtížné se s ním eventuálně samostatně seznámit.

Jestliže chceme definovat limitu (reálné nebo komplexní) funkce vzhledem k množině M v kontextu metrických prostorů, musíme být opatrní. Je-li $M\subset(P,\rho)$ a je-li f funkce definovaná na M, definujeme její limitu *pouze v hromadných bodech množiny* M.

Definice 12.5.3. Řekneme, že číslo A je limitou f vzhledem k $M \subset (P,\rho)$ v hromadném bodě a množiny M, jestliže platí

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in M,\ \rho(x,a) < \delta)(|f(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

V takové situaci užíváme obdobného označení jako dříve a píšeme

$$\lim_{x\in M,\, x\to a} f(x) = A\,. \tag{12.46}$$

Není obtížné si uvědomit, že opět platí ekvivalence stejného typu jako u Heineho definice limity. Platí (12.46), právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \neq a$, $k \in \mathbb{N}$, pro kterou $x_k \to a$, platí $f(x_k) \to A$. Důkaz této ekvivalence přenecháme čtenáři.

Poznámka 12.5.4. Je-li f definována na M, je f spojitá v bodě $a \in M$, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \to a$ je také $f(x_k) \to f(a)$. Pro izolovaný bod množiny $a \in M$ jsou však posloupnosti $\{x_k\}$ konvergentní k a skoro konstantní, tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k = a$ pro všechna $k \geq n$.

S definicí limity f v bodě a je to složitější. I v jednoduchém případě prostoru $\mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{x_k\}$, $x_k \neq a$, $x_k \to a$, je $f(x_k) \to A$. V bodě a, který je *izolovaným bodem* množiny M není $\lim_{k\to\infty, x_k\in M} f(x_k)$, definována, neboť žádná taková posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \to a$, pro kterou by platilo $x_k \to a$, neexistuje. Naproti tomu je f v bodě a spojitá a bude spojitá i v případě, že jakkoli její hodnotu v bodě a změníme. Proto bychom při pokusu definovat konsistentně limitu f v izolovaném bodě M okamžitě narazili na problém její jednoznačnosti. Limitu vzhledem k $M \subset (P, \rho)$ funkce f definujeme *pouze v hromadných bodech množiny M*.

Tvrzení 12.5.5. *Nechť $A \subset (P, \varrho)$, $A \neq \emptyset$. Potom $x \mapsto d_A(x)$, $x \in P$, je spojitá funkce na P.*

Důkaz. Stačí zvážit význam nerovnosti (12.27) z Příkladu 12.3.5, ze které spojitost přímo vyplývá. □

Poznámka 12.5.6. Z teoretického hlediska není na definici spojitosti zobrazení v bodě nic nového. S příklady spojitosti tohoto typu jsme se již setkali. Jestliže zavedeme na prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ stejnoměrnou metriku, pak Důsledek 11.2.36 ukazuje, že funkcionál A, definovaný v Označení 11.2.28, je *spojitý*. Tam jsme odvodili odhad (11.29), který lze přepsat do tvaru

$$|A(f) - A(g)| \leq \varrho_1(f, g) \leq (b - a)\varrho_\infty(f, g).$$

Na prostoru $\mathcal{R}(a, b)$ se supremovou metrikou je A rovněž spojitý. Má to však jeden „háček“: abychom z $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ a $f_n \in \mathcal{R}(a, b)$ mohli odvodit $A(f_n) \to A(f)$, museli bychom *navíc* vědět, že platí i $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Uveďme nyní několik podmínek ekvivalentních s „globální spojitostí“, tj. spojitostí na celém prostoru.

Věta 12.5.7 (Hausdorff 1914). *Pro každé zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ jsou ekvivalentní tyto podmínky:*

(1) *zobrazení f je spojité na P;*

(2) *množina $f^{-1}(G)$ je otevřená v P pro každou množinu $G \subset Q$ otevřenou v Q;*

(3) *množina $f^{-1}(F)$ je uzavřená v P pro každou množinu $F \subset Q$ uzavřenou v Q;*

(4) *pro každé $A \subset P$ je $f(\overline{A}) \subset \overline{(f(A)}$.*

Poznámka 12.5.8. V části (4) je uzávěr $\overline{A}$ samozřejmě uzávěrem v prostoru P, $\overline{(f(A)}$ uzávěrem v prostoru Q. Někdy se začleňují mezi podmínky věty i některá ekvivalentní vyjádření spojitosti ve všech bodech prostoru P, která jsme poznali dříve; srovnej např. [12]. Důsledkem podmínky (2) je např. charakteristika spojitých funkcí, se kterou se čtenář jistě setká: funkce f je spojitá na (P, ϱ), jestliže jsou pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ množiny $\{x \in P\,;\, f(x) < \alpha\}$ a $\{x \in P\,;\, f(x) > \alpha\}$ otevřené.

Důkaz. Dokážeme postupně řetěz implikací

$$(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)\,.$$

(1) ⇒ (4): Je-li $x \in \overline{A}$, existují body $x_n \in A$ tak, že $x_n \to x$. Pak je $f(x_n) \in f(A)$ a ze spojitosti f plyne, že $f(x_n) \to f(x)$; z toho plyne $f(x) \in \overline{f(A)}$.
(4) ⇒ (3): Předpokládejme, že $F = \overline{F} \subset Q$ a dokažme, že pak je uzavřená i množina $A := f^{-1}(F)$, tj. že $\overline{A} \subset A$. Podle (4) je

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F\,,$$

takže

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F) = A\,;$$

(3) ⇒ (2): Je-li $G \subset Q$ otevřená množina, je $F := Q \setminus G$ uzavřená. Podle (3) je tedy uzavřená i $f^{-1}(F)$, takže

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(Q \setminus F) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(F) = P \setminus f^{-1}(F)\,,$$

což je jakožto doplněk uzavřené množiny otevřená množina.
(2) ⇒ (1): Je-li $\varepsilon > 0$ a $x \in P$ libovolně zvolený bod, pak

$$f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

je otevřená množina a s bodem x obsahuje i $B(x, \delta)$ pro jisté $\delta > 0$. Odtud ale plyne spojitost f v x, a proto je zobrazení f spojité v P. □

Příklad 12.5.9. Funkce $f(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, zřejmě není spojitá v bodě 0; všimněte si, že pro

$$M := f^{-1}([\,1/2, 1\,])$$

platí $0 \notin M$, i když zřejmě je $0 \in \overline{M}$. Funkce f tedy nesplňuje podmínku (3) z Věty 12.5.7.

Poznámka 12.5.10. V obou Čechových knihách [4] a [5] je uzávěr množiny $A \subset (P, \varrho)$ zaváděn pomocí funkce $d_A(x)$ vzdálenosti bodu x od množiny A. Toto pojetí má některé výhody, je však vázáno na práci pouze v MP a je časově patrně ekonomičtější.

Příklad 12.5.11. Je-li $A \subset (P, \varrho)$ libovolná neprázdná množina a je-li $\varepsilon > 0$, nazývá se množina

$$G_\varepsilon(A) := \{x \in P; d_A(x) < \varepsilon\}$$

ε-okolí množiny A. Dokažme, že pro *každou neprázdnou množinu $A \subset (P, \varrho)$ je*

$$\overline{A} = \{x \in P; d_A(x) = 0\}\,.$$

Označme M množinu na pravé straně. Je zřejmě uzavřená a obsahuje A, tedy $\overline{A} \subset M$. Je-li $y \notin A$, existuje $\delta > 0$ tak, že $B(y, \delta) \cap A = \emptyset$. Je zřejmé, že pak $d_A(y) \geq \delta$ a bod y neleží v M. Tím je rovnost $M = \overline{A}$ dokázána.

Věta 12.5.12. *Pro každé dvě neprázdné disjunktní uzavřené množiny v metrickém prostoru (P, ϱ) existuje spojitá funkce $f : P \to [\,0, 1\,]$ tak, že $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$ a $0 < f(x) < 1$ pro všechna $x \in P \setminus (A \cup B)$.*

Důkaz. K důkazu použijeme vzdálenost $d_A(x)$ bodu x od množiny A. Stačí položit

$$f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}\,.$$

Funkce f je spojitá a zřejmě je $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Pro každé $x \in P \setminus (A \cup B)$ čitatel zlomku vpravo menší nežli jeho jmenovatel, takže $0 < f(x) < 1$. □

12.6 Spojitost funkcí více proměnných

Velmi důležitou partii analýzy tvoří vyšetřování funkcí více proměnných, případně zobrazení množin z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ s $n, k \in \mathbb{N}$. Příslušnou teorii, která je relativně obsáhlá, nebudeme rozvíjet. Na jednoduchém příkladu si však přiblížíme několik základních poznatků.

Z toho, co jsme již řekli, speciálně vyplývá definice spojitosti *funkce více proměnných*, tj. zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$. Všimneme si toho, že praktické vyšetření spojitosti nebo limity funkce více proměnných není až zas tak jednoduché, jak by se na první pohled po přečtení základních definic mohlo zdát. Tuto část je třeba chápat jako průpravu pro Kapitolu 14, v níž se seznámíme blíže s diferenciálními rovnicemi. Poznamenejme, že tak jako v $\mathbb{R}^1$ užíváme v $\mathbb{R}^m$ ekvivalentních podmínek pro spojitost typu Heineho definice spojitosti apod.

Příklad 12.6.1. Vyšetřeme funkci dvou proměnných

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,.$$

Podle našich dřívějších úmluv, které opět přeneseme z $\mathbb{R}^1$ na $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, budeme pokládat za D_f množinu všech $[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2$, pro něž má výraz v rovnosti vpravo smysl, tedy

$$D_f = \{[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{[\,0, 0\,]\}\,.$$

Je také zřejmé, že při vyšetřování limit či spojitosti v $\mathbb{R}^2$ musíme pracovat s „dvourozměrnými“ okolími vyšetřovaného bodu. K vyšetření použijeme vhodně zvolené posloupnosti. Protože pro posloupnosti bodů $[\,0, 1/n\,]$ a $[\,1/n, 1/n\,]$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$f(0, 1/n) = 0 \to 0 \quad \text{a také} \quad f(1/n, 1/n) = \frac{n^{-2}}{2n^{-2}} = 1/2 \to 1/2\,,$$

nemá funkce f limitu v počátku.

Je-li $\{\, y = kx;\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}\,\}$ svazek přímek procházejících počátkem, pak pro každou přímku má restrikce f na tuto přímku v počátku limitu:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}\,.$$

Jak vidíme, tato limita závisí na k. Zejména je nutno pochopit, že např. spojitost restrikce funkce $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na každé přímce procházející bodem $[\,0,0\,]$ nezaručuje ještě spojitost f v tomto bodě. Při vývoji spojitosti funkcí více proměnných nebylo překonání představy, že „oddělená spojitost“, tj. spojitost funkcí

$$f^x : y \mapsto f(x,y)\,, \quad f^y : x \mapsto f(x,y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, *nesplývá* se spojitostí f v $\mathbb{R}^2$ podle naší definice; v minulosti, v zárodku teorie funkcí více proměnných, nebylo zcela jasné, jak se tyto věci liší.

Příklad 12.6.2. Vyšetřeme nyní funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}\,.$$

Je opět $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{[\,0,0\,]\}$. Pro posloupnosti bodů z předcházejícího příkladu $[\,0,1/n\,]$ a $[\,1/n,1/n\,]$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$f(0,1/n) = 0 \to 0 \quad \text{a také} \quad f(1/n,1/n) = \frac{n^{-3}}{n^{-4}+n^{-2}} = \frac{1/n}{1/n^2+1} \to 0\,,$$

avšak přesto funkce f *nemá* limitu v počátku. Je-li $\{y = kx^2;\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}\}$ svazek parabol, pak pro každou takovou parabolu má restrikce funkce f na tuto parabolu v počátku limitu závislou na parametru k

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}\,,$$

avšak při použití svazku přímek je tato limita stále rovna 0. Lze sestrojit příklady, které na místě svazku přímek mají mnohem komplikovanější svazky polynomiálních křivek apod.; viz např. [8].

Historická poznámka 12.6.3. V této kapitole je jen málo tvrzení, historický komentář se proto týká převážně vývoje teorie a jejích základních pojmů. Zatím jsme se většinou zabývali pouze příklady; pokud jsme uváděli tvrzení, jde ve většině případů o přepis něčeho, co jsme poznali již dříve, do jiného označení.

Cauchyho nerovnost prodělala poměrně dlouhý vývoj. Protože existují další zobecnění této nerovnosti, bývá k jejímu označení užíváno libovolné kombinace jmen Cauchy, Schwarz, Bunjakovskij. To má následující kořeny: Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) odvodil nerovnost v popsaném tvaru. Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804 – 1889) dokázal platnost integrální varianty nerovnosti r. 1859. Nezávisle k ní dospěl r. 1875 Carl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), který ji pak zobecnil i na vícerozměrný integrál r. 1885.

Poznamenejme, že podstatnou část teorie normovaných lineárních prostorů vytvořil Frederik Riesz při studiu prostorů l^p (v obecnější formě) již v r. 1913 v práci [13]. Rovněž i stěžejní tvrzení z této oblasti matematiky byla známa před r. 1932, kdy vyšla kniha [1]. Vlastnosti normy v normovaném lineárním prostoru jsou v přímé souvislosti s konvexitou koulí $B(x,r)$ v tomto prostoru. Koule v ℓ_m^p s rostoucím $p \in [1,\infty)$ rostou monotónně, mezními případy jsou „čtvercové koule" v ℓ_2^1 a ℓ_2^∞, nebo osmistěn a krychle v ℓ_3^1 a ℓ_3^∞. Viz Obr. 3 v této kapitole, na kterém čísla $1, 2, \dots, \infty$ jsou vybranými hodnotami parametru p; obrázek je pouze schématem pro lepší představu věci. Za zmínku stojí fakt, že nerovnost z Lemmatu 12.2.8 dokázal o rok dříve v modifikované podobě Leonard James Roger (1862 – 1933), Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937) jeho práci cituje; viz [11]. Myšlenka důkazu Minkovského nerovnosti z Hölderovy nerovnosti pochází od F. Riezse z práce [13].

Charakteristika globální spojitosti (ekvivalence podmínek (1) – (3) z Věty 12.5.7) pochází od Hausdorffa z práce [9]. Jiná závažnější tvrzení v této kapitole obsažena nejsou. Teprve však následující kapitola ukáže, proč je tento „nový jazyk" tak významný. Jeho význam pro analýzu je srovnatelný s vlivem, který přinesla teorie množin, a je pokračováním jejího vývoje v jistém směru.

Již bylo řečeno výše, že metrické prostory zavedl Fréchet r. 1906. Někdy se udává jiná doba, většina autorů však odvozuje údaj od publikace jeho práce [7]. Přibližme si jeho definici: *Uvažujme třídu* (V) *prvků libovolné povahy, ale takových, že lze o každých dvou říci, zda splývají či nikoli. Navíc takovým dvěma prvkům lze přiřadit číslo* $(A,B) = (B,A) \ge 0$*, které má následující dvě vlastnosti:* 1° *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby* (A,B) *byla nula je, aby* A *a* B *splývaly.* 2° *Existuje nezáporná funkce* $f(\varepsilon)$ *jdoucí k* 0 *spolu s* ε *taková, že nerovnosti* $(A,B) \le \varepsilon$*,* $(B,C) \le \varepsilon$ *dávají* $(A,C) \le f(\varepsilon)$*, ať jsou body* A, B, C *jakékoli. Jinak řečeno, stačí, aby* (A,B) *a* (B,C) *byly malé, aby platilo totéž o* (A,C)*. Číslo* (A,B) *nazýváme* odlehlost (*voisinage*) *bodů* A *a* B.

O kus dále Fréchet zavádí ve vší obecnosti *metriku* (l'écart) a uvádí i trojúhelníkovou nerovnost: $(A,B) \le (A,C) + (C,B)$. Zřejmě předpokládá i její symetrii, ač ji výslovně neuvádí, neboť se vrací k definici třídy (V) popsané výše a říká, že pro metriku stačí volit např. $f(\varepsilon) = 2\varepsilon$. Pro prostor v našem smyslu metrický užívá označení (E) a upozorňuje, že (dle jeho definice) metrika je vždy vzdáleností, a tedy třída (E) je vždy i třídou (V).

Bylo by nespravedlivé nezmínit alespoň některé Fréchetovy předchůdce. K tvorbě jednotlivých základních pojmů v kontextu eukleidovských prostorů významně přispěli např. Camille Jordan, Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), Félix Edouard Justin Émile Borel (1871 – 1956), René-Louis Baire (1874 – 1932) a Henri Léon Lebesgue (1873 – 1941). Na pozdějším formování teorie v obecnějším kontextu se podíleli Vitto Volterra (1860 – 1940), David Hilbert (1862 – 1943) a Ivar Fredholm (1866 – 1927). Zároveň je tím pokryt popis vzniku (metrizovatelných) topologických prostorů.

Poznamenejme ještě srovnání: Fréchetova teorie byla založena vpodstatě na pojmu konvergentní posloupnosti a při svém zrodu nebyla dostatečně obecná. Frederik Riesz načrtl v letech 1907–8 obecnější teorii, jejímž základem byl pojem hromadného bodu; jeho pojetí bylo obecnější, ale i komplikovanější a sám autor se dalšímu rozpracovávání teorie metrických prostorů v celé šíři nevěnoval a soustředil se na některé speciální problémy.

Kromě Banachových prostorů (úplné normované lineární prostory) a Hilbertových prostorů (úplné prostory se skalárním součinem) se vyskytuje mnoho speciálních prostorů, pojmenovaných po slavných objevitelích. Pozor, např. *Fréchetův prostor není obecný MP*, ale *úplný metrický lineární prostor*, ve kterém je metrika definována pomocí tzv. paranormy (paranorma je funkce podobného typu jako norma, avšak s vlastnostmi, které jsou „slabší" než vlastnosti normy) tak, že platí

$$(x_n \to x,\, \alpha_n \to \alpha) \Rightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x\,.$$

Čtenář se po přečtení následující kapitoly patrně přesvědčí, že se některá nám již známá tvrzení po zobecnění do kontextu MP stanou mnohem průhlednější, neboť se ozřejmí jejich jádro či mechanismus, který je použit při důkazu (platí to např. u tvrzení o spojitých funkcích na intervalu $[\,a,b\,]$).

V souvislosti s krátkou exkurzí do problematiky spojitosti funkcí více proměnných poznamenejme, že tyto funkce byly zkoumány již v 18. stol. Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) studoval pomocí nich r. 1748 chvění strun. Ještě Cauchy r. 1821 zaměňoval oddělenou spojitost se spojitostí (na omyl upozornil r. 1884 Peano).

Literatura:

[1] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[2] Bourbaki, S.: *Očerki po istorii matěmatiki*, Izdatělstvo IL, Moskva, 1963, (překlad z francouzštiny).

[3] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[4] Čech, E.: *Bodové množiny. Část první*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1936, (druhá část nevyšla; viz též následující citace).

[5] Čech, E.: *Bodové množiny*, Academia, Praha, 1974, (obsahuje první tři kapitoly knihy z předcházející citace a posmrtně upravený rukopis její druhé části).

[6] Engelking, R.: *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] Fréchet, M.: *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Math. Palermo **22** (1906), str. 1 – 74. (s poznámkou: Thèse prèsentée à la Facultè des Sciences pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences).

[8] Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisko, 1964, (existuje ruský překlad z r. 1967).

[9] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[10] Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, 1927.

[11] Maligranda, L.: *Why Hölder's inequality should be called Rogers's inequality*, Research Report Dpt. of Math., Luleå Uni. **10** (1995), str. 1 – 17.

[12] Pultr, A.: *Matematická analýza* [I], Matfyzpress, Praha, 1995.

[13] Riesz, F.: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913.

[14] Zajíček, L.: *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, Praha, 2003.