Příklady ke cvičení z MMA – ZS 2013/14

(středa, **M3**, 9:50 – 11:20)

Poznámka $(*)$ **:** Pokud nebude uvedeno jinak budeme vždy pracovat s prostory nad tělesem $T = \mathbb{R}$. Ve všech ostatních případech (tj. při $T = \mathbb{C}$), bude těleso explicitně specifikováno. Budeme používat některé zkratky: MP pro metrický prostor(-y), NLP pro normovaný prostor(-y), UP pro prostor se skalárním součinem (unitární prostor), TP pro topologický prostor apod. Později zavedeme ještě další zkratky.

Cvičení 1: Pokud je metrika ρ na NLP X definována příslušnou normou, má speciální vlastnosti: pro všechna $x, y, z \in X$ a všechna $\alpha \in T$ platí

$$\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)\,, \quad \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, \rho(x, y)\,.$$

Proč ? Znáte nějakou metriku na LP, která tuto vlastnost nemá ? Má-li metrika na LP tyto dvě vlastnosti, je generována nějakou normou ?

Cvičení 2: Vlastnosti normy „kopírují“ vlastnosti absolutní hodnoty na $\mathbb{R}$. Uvědomte si trojúhelníkovou nerovnost pro normu, resp. její části, pokud ji zapisujete v „obsažnějším“ tvaru

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\|\,,$$

Tuto složenou nerovnost budeme často používat. ze které plyne spojitost normy. Lze dokázat, že všechny normy na LP n-tic reálných (komplexních) čísel jsou ekvivalentní !

Cvičení 3: Připomeňte zavedení skalárního součinu na LP X ! Vlastnosti budeme obvykle zapisovat ve tvaru :

$$\begin{gathered}(x, x) \ge 0\,, (x, x) = 0\,,\ \text{právě když } x = 0\,,\\ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)\,,\\ (x, y) = (y, x)\,,\ \text{resp. } (x, y) = \overline{(y, x)}\,,\end{gathered}$$

přičemž poslední vztah užíváme v případě, že pracujeme na LP nad $\mathbb{C}$. Normu na X pak definujeme vztahem $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ a používáme zkratku UP.

Cvičení 4: Dokažte, že na UP platí tzv. Schwarzova nerovnost

$$\big|(x, y)\big| \le \|x\|\, \|y\|\,!$$

Cvičení 5: Pro normu na (komplexním) UP dokažte pomocí Schwarzovy nerovnosti trojúhelníkovou nerovnost !

Cvičení 6: Dokažte, že norma generovaná skalárním součinem na UP splňuje podmínku: pro všechna $x, y \in X$ je

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,;$$

(tzv. rovnoběžníkové pravidlo; ukažte, že tento název má své opodstatnění). Existuje normovaný lineární prostor (NLP), ve kterém norma tuto podmínku nesplňuje ?

Jestliže norma na NLP X (nad $\mathbb{R}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, lze odpovídající skalární součin definovat takto: položíme

$$p(x,y) := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)\,;$$

funkce p na $X \times X$ je již hledaným skalárním součinem. Ukažte, že obecně přes „definici“ součinu $(x,y) := (1/2)\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$ cesta nevede. V případě, že pracujeme s prostorem X nad $\mathbb{C}$, je $p(ix,y) = -p(x,iy)$ a hledaný skalární součin má tvar

$$(x,y) := p(x,y) - ip(ix,y).$$

Důkaz odpovídajícího tvrzení vyžaduje trochu práce.

Cvičení 7: Systém $\mathfrak{B}$ všech otevřených množin metrického prostoru (X,ρ) má tyto vlastnosti:

(a) $\emptyset, X \in \mathfrak{B}$,

(b) sjednocení libovolného podsystému systému $\mathfrak{B}$ je prvkem $\mathfrak{B}$, a

(c) průnik konečného podsystému systému $\mathfrak{B}$ je prvkem $\mathfrak{B}$.

Všimněte si, že pro libovolnou dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, lze nalézt $U_x, U_y \in \mathfrak{B}$ tak, že $x \in U_x$, $y \in U_y$ a $U_x \cap U_y = \emptyset$ (systém $\mathfrak{B}$ *odděluje body* prostoru X).

Cvičení 8: Libovolný systém $\mathfrak{B}$ podmnožin množiny X s vlastnostmi (a), (b), (c) z předcházejícího cvičení se nazývá *topologie* (na X). Topologii na X velmi často značíme τ a dvojici (X,τ) nazýváme *topologický prostor*. Prvky systému τ jsou otevřené množiny (X,τ) a pomocí nich lze zavést v (X,τ) řadu pojmů, které znáte z teorie MP (pozor, vše „nefunguje“ zcela analogicky jako v MP !).

Cvičení 9: Triviálními topologiemi na X jsou např. systémy $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ nebo systém $\tau_2 = \mathfrak{P}(X)$ všech podmnožin množiny X. Které funkce na (X,τ_1) nebo na (X,τ_2) jsou spojité ? Je-li $\#(X) \geq 2$, τ_1 neodděluje body X. (Problém možnosti vytvořit topologii metrikou nebudeme blíže zkoumat.)

Cvičení 10: Ověřte všechny vlastnosti standardní metriky na prostoru $C([\,a,b\,])$. Totéž proveďte pro $C([\,a,b\,])$ s integrální metrikou.

Cvičení 11: Rozmyslete si vlastnosti integrální metriky na prostoru $\mathcal{R}([,b\,])$ všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[\,a,b\,]$. Jak pracujeme s třídami skoro všude spojitých funkcí?

Cvičení 12: Prostor m je tvořen všemi omezenými posloupnostmi, prostor c všemi konvergentními posloupnostmi, prostor c_0 všemi posloupnostmi konvergentními k 0 a prostor s_0 všemi posloupnostmi, které mají pouze konečný počet nenulových členů. Ve všech lze zavést pro $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} =: \{x_k\}$ normu vztahem

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup\{\, |x_k|\,;\, k \in \mathbb{N}\,\}$$

(Můžeme pracovat s posloupnostmi reálných nebo komplexních čísel.) Jestliže $X \subset\subset Y$ značí vztah X je lineárním podprostorem Y, je zřejmě

$$s_0 \subset\subset c_0 \subset\subset c \subset\subset m \subset\subset s\,,$$

kde s je LP všech posloupností čísel (z $\mathbb{R}$ nebo z $\mathbb{C}$).

Cvičení 13: Normu v prostoru všech n-tic reálných (nebo komplexních) čísel lze pro $p \geq 1$ zavést předpisem

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Ukažte, že je

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\big\{|x_k|\,;\, k \in \{1,\dots,n\}\big\} = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p\,.$$

Tyto prostory značíváme ℓ_n^p (je tedy $\ell_n^\infty \subset\subset m$).

Cvičení 14: Analogicky zavádíme pro $p \geq 1$ prostory posloupností: Na lineárním prostoru ℓ^p všech posloupností $\mathbf{x} = \{x_k\}$, pro něž je $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ definujeme

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Při použití tohoto označení je rozumné klást $\ell^\infty = m$ z analogických důvodů jako ve Cvičení 7.

Cvičení 15: Zaveďte na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nezápornou funkci $\sigma(x, y)$ předpisem

$$\sigma(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,!$$

Všimněte si, že je omezená a ukažte, že σ je metrika $\mathbb{R}$! Poznámka: Funkce p na LP X s vlastnostmi

$$(1)\quad p(x) \geq 0\,, \qquad (2)\quad p(0) = 0\,, \qquad (3)\quad p(x) = p(-x)$$
$$(4)\quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$
$$(5)\quad \text{pro } t_k \to t \text{ a pro } x_k \to x \text{ je } p(t_k x_k - tx) \to 0$$

je paranorma na X. Zkoumejte $p(x-y)$!

Cvičení 16: Zobecněte předchozí úlohu a dokažte, že je-li $\rho = \rho(x, y)$ metrika na MP X, je také

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

(omezená) metrika na X. To nám dává možnost zavést omezenou metriku na jakémkoli MP. Přitom se tato metrika od původní liší jen „nepodstatně“ – k této konstrukci se ještě vrátíme.

Cvičení 17: Je poměrně vžité užívání standardního označení pro prostory všech posloupností reálných, resp. komplexních čísel, které pak uvažujeme jako prostory nad $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. Tento prostor lze opatřit matrikou ρ např. tak, že pro všechna $x, y \in X$ položíme

$$\rho(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Tento prostor budeme značit s.

Cvičení 18: Ukažte, že v s platí: je-li $x_k \to x_0$ v s a $\alpha_k \to \alpha_0$ v T, pak $\alpha_k x_k \to \alpha_0 x_0$.

Cvičení 19: V tomto cvičení zobecníme Schwarzovu nerovnost na $\mathbb{R}^m$: pro každá čísla $p, q \in (0, \infty)$ splňující podmínku $p + q = p\,q$, neboli

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1\,,$$

a každé dva body $[\,x_1, \dots, x_m\,]$, $[\,y_1, \dots, y_m\,]$ z $\mathbb{R}^m$ platí Hölderova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{m} |\,x_k y_k\,| \le \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,y_k\,|^q\Big)^{1/q}.$$

Cvičení 20: Pro každé p, $1 < p < \infty$, a pro každou dvojici bodů $x = [\,x_1, \dots, x_m\,]$, $y = [\,y_1, \dots, y_m\,]$ z $\mathbb{R}^m$ platí nerovnost Minkowskiho (česky Minkowského)

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,y_k\,|^p\Big)^{1/p}.$$

Jaký je její význam v kontextu MP ?

Cvičení 21: Dokažte Hölderovu a Minkovskiho nerovnost pro prostory posloupností ℓ^p (tj. obdobné nerovnosti pro nekonečné řady) !

Cvičení 22: Připomeňte definici otevřené a uzavřené koule a sféry v kontextu MP. V diskrétním MP „jednotková sféra obsahuje libovolně mnoho disjunktních otevřených jednotkových koulí“.

Cvičení 23: Připomeňte si definici *diametru množiny.* Proč je součástí definice část, vymezující speciálně $\mathrm{diam}(\emptyset)$? Všimněte si vztahů mezi „poloměrem“ a „průměrem“ koule v diskrétním prostoru !

Cvičení 24: Jak popisujeme vzájemný vztah bodu a množiny v MP? Připomeňte si definici vnitřního, vnějšího a hraničního bodu množiny! Jak se definuje hromadný bod množiny?

Cvičení 25: Jak definujeme spojitost a limitu funkce, definované na MP? Proč nemůžeme definovat limitu funkce vzhledem k množině v jejím izolovaném bodě?

Cvičení 26: Definice *vzdálenosti množin* M, N v MP (P,ρ) je $(M,N \neq \emptyset)$

$$\operatorname{dist}(M,N) := \inf\{\rho(x,y)\,;\, x \in M,\ y \in N\}\,.$$

Často zjednodušujeme, zde např. píšeme $\operatorname{dist}(x,A)$ místo $\operatorname{dist}(\{x\},A)$ a mluvíme o vzdálenosti bodu od množiny.

Cvičení 27: Označme $d_A(x)$ pro neprázdnou množinu $A \subset (P,\rho)$ vzdálenost bodu x od množiny A. Dokažte nerovnost

$$\big|\, d_A(x) - d_A(y) \,\big| \leq \rho(x,y)\,.$$

Je-li $x \in A$, je $d_A(x) = 0$. Lze toto tvrzení obrátit, tj. plyne z $d_A(x) = 0$, že $x \in A$?

Cvičení 28: Najděte dvě disjunktní množiny v $\mathbb{R}$ s nulovou vzdáleností! Je pro $r > 0$ vzdálenost $B(x,r)$ a $K(x,r)$ vždy 0? Je pro $r > 0$ vzdálenost $B(x,r)$ a $S(x,r)$ vždy 0? Je pro $r > 0$ vzdálenost $S(x,r)$ a $K(x,r)$ vždy 0?

Cvičení 29: Lze volit M, N neprázdné *uzavřené* v $\mathbb{R}^n$ s $\operatorname{dist}(M,N) = 0$ disjunktní?

Cvičení 30: Je vzdálenost $d_A(x)$ bodu od množiny spojitá funkce? Lze ji nějak využít, např. k popisu uzávěru $\overline{A}$ množiny A?

Cvičení 31: Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ (jde pouze o označení, nikoli o „p-čkové“ normy!) na LP X takové, že existují kladné konstanty C, D a pro všechna $x \in X$ platí

$$C\|\,x\,\|_1 \leq \|\,x\,\|_2 \leq D\|\,x\,\|_1$$

se nazývají *ekvivalentní normy* na X. Uveďte příklady! Je to symetrický vztah?

Cvičení 32: Na prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ lze definovat supremovou a integrální normu. Zkoumejte vztahy mezi nimi. Jsou tyto normy ekvivalentní?

Cvičení 33: Jsou normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_\infty$ na $\mathbb{R}^m$ ekvivalentní? Co lze říci o normách $\|\cdot\|_p$ pro obecné p?

Cvičení 34: Zamyslete se nad možnostmi vytváření dalších MP. Jsou-li (P,ρ) a (Q,σ) dva MP, lze zavést nějak přirozeně metriku na $P \times Q$?

Cvičení 35: Je-li (P,ρ) MP a definujeme-li

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\,,$$

je $\sigma(x,y) \leq \rho(x,y)$. Není-li (P,ρ) omezený, *nelze nalézt* kladné konstanty C, D tak, aby

$$C\sigma(x,y) \leq \rho(x,y) \leq D\sigma(x,y)$$

pro všechna $x,y \in (P,\rho)$ (Proč?).

Cvičení 36: Metriky z předcházejícího příkladu jsou i jinak odlišné: je-li ρ generována normou, σ tuto vlastnost nemá.

Cvičení 37: Říkáme, že metriky ρ a σ jsou na prostoru P ekvivalentní, platí-li pro každou posloupnost bodů $x_n \in P$ a každé $x \in P$ ekvivalence

$$\lim x_n = x \text{ v } (P, \rho) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim x_n = x \text{ v } (P, \sigma)\,.$$

Ukažte, že pro metriky ze Cvičení 11 je

$$(1/2)\rho(x, y) \le \sigma(x, y) \le \rho(x, y)$$

pro všechna $x \in (P, \rho)$ a ta $y \in (P, \rho)$, pro něž je

$$\rho(x, y) < 1\,.$$

Cvičení 38: Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ jsou izometricky izomorfní. Co si pod tím představíte?

Cvičení 39: Označíme-li $C_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C};\, y = 0\}$, je C_1 izometrický s $\mathbb{R}^1$. Podrobněji, (metrický) podprostor C_1 s metrikou indukovanou z $(\mathbb{C}, \rho)$ je izometrický s $\mathbb{R}^1$.

Cvičení 40: Je-li T *prosté* zobrazení množiny P do metrického prostoru (Q, σ), lze jednoduše z P vytvořit MP tak, aby T byla izometrie (P, ρ) a $(T(P), \sigma)$; stačí definovat na P metriku ρ předpisem

$$\rho(x, y) := \sigma(T(x), T(y))\,, \quad x, y \in P\,.$$

Toto je jedna z cest, pomocí níž lze definovat další MP.

Cvičení 41: Na prostoru $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definujme zobrazení do $\mathbb{R}$

$$T(x) := \frac{x}{1 + |x|}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

a klademe $T(x) := \pm 1$, je-li $x = \pm\infty$. T je prosté zobrazení $\mathbb{R}^*$ na interval $[\,-1, 1\,]$. Za (Q, σ) zvolme $[\,-1, 1\,]$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}^1$ a definujme pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$\rho(x, y) = |\,T(x) - T(y)\,|\,.$$

Tak jsme získali dvojici izometrických prostorů a opatřili $\mathbb{R}^*$ metrikou.

Cvičení 42: Lze z každé posloupnosti bodů MP $(\mathbb{R}^*, \rho)$, kde ρ je metrika, definovaná ve Cvičení 39, vybrat posloupnost konvergentní v $(\mathbb{R}^*, \rho)$?

Cvičení 43: Označme K^* *půlkružnici* $\{\,[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + (y-1)^2 = 1\,,\ y \le 1\,\}$ a její body „promítněte z bodu $[\,0, 1\,]$ na $\mathbb{R}^*$“. Použijte popsanou situaci k definici zobrazení a metriky na $\mathbb{R}^*$ s obdobnými vlastnostmi, jaké má ρ z předcházejících dvou cvičení!

Cvičení 44: Označme K *kružnici* $\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+(y-1)^2 = 1 \}$ a její body „promítněte z bodu $[0,2]$ na $\mathbb{R}^\# := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$“. Postupujte jako v předchozím cvičení a použijte popsanou situaci k definici zobrazení a metriky ρ na $\mathbb{R}^\#$ s obdobnou vlastností, jakou měl vzniklý MP $(\mathbb{R}^*, \rho)$ ze Cvičení 40 (resp. 39)!

Cvičení 45: Jsou MP $(\mathbb{R}^*, \rho)$ a $(\mathbb{R}^\#, \rho)$ úplné, tj. konverguje v nich každá posloupnost, splňující Bolzano-Cauchyho podmínku („cauchyovská“ posloupnost)? Uvědomte si, že prosté zobrazení $g := T^{-1}$, kde

$$T(x) := \frac{x}{1+|x|}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

zobrazuje některé cauchyovské posloupnosti bodů intervalu $(0,1)$ na posloupnosti bodů z $\mathbb{R}$, které cauchyovské nejsou!

Cvičení 46: Množiny $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$. Mají různou „velikost“ (mohutnost)?

Cvičení 47: „Pohrajte si“ trochu s hustými podmnožinami v $\mathbb{R}$:
(a) Existují dvě *disjunktní* podmnožiny $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ husté v $\mathbb{R}$?
(b) Existují pro každé $n \in \mathbb{N}$ disjunktní podmnožiny $M_1, \dots, M_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ husté v $\mathbb{R}$?
(c) Existuje nekonečně mnoho disjunktních podmnožin $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hustých v $\mathbb{R}$?
(d) Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je spočetná. Je pak $\mathbb{R} \setminus M$ hustá v $\mathbb{R}$?
Zkuste formulovat podobné problémky a pak je řešte! Tímto způsobem přistupujte i k dalším pojmům, se kterými se budeme v rámci teorie MP seznamovat!

Cvičení 48: Ukažte, že množina M je řídká v MP (P, ρ) (tj. $\left(\overline{M}\right)^\circ = \emptyset$, právě když je

$$\overline{(P \setminus \overline{M})} = P.\Big)$$

Cvičení 49: Uvědomte si: komplement husté množiny nemusí být řídká množina, komplement řídké množiny nemusí být hustá množina. Rozmyslete si, že přidáním jednoduché vlastnosti budou tyto přechody ke komplementům „dobře fungovat“. Např. komplement *uzavřené* řídké množiny je hustá množina.

Cvičení 50: Je sjednocení $M_1 \cup M_2$ dvou řídkých množin $M_1, M_2 \subset (P, \rho)$ opět řídká množina? Je sjednocení konečného počtu řídkých množin v (P, ρ) opět řídká množina?

Cvičení 51: Je sjednocení spočetné množiny řídkých množin v (P, ρ) opět řídká množina?

Cvičení 52: Kolik různých hustých (řídkých) množin umíte nalézt v diskrétním prostoru ze Cvičení 40? Kdy je diskrétní prostor separabilní? Kdy je diskrétní prostor totálně omezený?

Cvičení 53: Ilustrujte metodu kategorií na důkazu existence iracionálního čísla!

Cvičení 54: (*) Dokažte metodou kategorií existenci funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$, která není monotónní na jakémkoli intervalu $[c,d] \subset [a,b]$. Viz pomocný text.

Cvičení 55: (*) Dokažte metodou kategorií existenci funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$, která nemá v žádném bodě konečnou jednostrannou derivaci. Viz pomocný text.

Cvičení 56: (*) Euler v jedné ze svých prací vyšel ze známého vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\,, \quad |z| < 1\,,$$

a dosadil za z výraz $\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$. Úpravami dostal rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos kt + i \sum_{k=0}^{\infty} \sin kt = \frac{1}{(1-\cos t) - i \sin t} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sin t}{2 - 2\cos t}$$

a porovnáním a úpravou reálných částí výrazů na obou stranách této rovnosti dostal rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt = -\frac{1}{2}\,.$$

Integrací a vhodným dosazením posléze obdržel

$$\frac{\pi - t}{2} = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots\,. \tag{Eu}$$

Uvědomte si všechny nekorektnosti postupu. (Funkci budeme dále chápat jako 2π-periodickou funkci nespojitou v lichých násobcích π, která se anuluje ve všech bodech nespojitosti.)

Cvičení 57: Ukažte, že vzhledem ke skalárnímu součinu $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ je systém $\{\mathrm{e}^{ikt}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, ortogonální!

Cvičení 58: Ukažte, že vzhledem ke skalárnímu součinu $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ je systém $\{1, \sin kt, \cos kt\}$, $k \in \mathbb{N}$, ortogonální! Použijte vzorce, známé ze středoškolské látky

$$\begin{aligned} 2\cos a \cdot \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b)\,, \\ 2\cos a \cdot \sin b &= \sin(a+b) - \sin(a-b)\,, \\ -2\sin a \cdot \sin b &= \cos(a+b) - \cos(a-b)\,. \end{aligned}$$

Cvičení 59: Předpokládejte, že

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(a_k \cos kt + b_k \sin kt\bigr)$$

a že řada vpravo konverguje stejnoměrně. Určete a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}_0$ pomocí f!

Cvičení 60: Pro částečný součet $s_n(f, x)$ Fourierovy řady spojité 2π-periodické funkce f odvoďte pro $x = 0$

$$s_n(f, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \Bigl(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\Bigr)\,\mathrm{d}t\,.$$

Cvičení 61: Následující vyjádření Dirichletova jádra budeme budeme potřebovat

$$D_n(t) = \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \Big) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \, \sin t/2}$$

(vyjádření se sin má smysl pouze pro $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, ale rovnost ukazuje, že v těchto bodech má D odstranitelné nespojitosti). Rovnost dokažte ze vzorce

$$\sin\Big(k + \frac{1}{2}\Big)t - \sin\Big(k - \frac{1}{2}\Big)t = 2 \cos kt \sin\Big(\frac{t}{2}\Big)$$

dosazením $k = 1, 2, \ldots, n$; vzniklé rovnosti „sečtěte“ a upravte.

Cvičení 62: Odhadněte normu lineárního funkcionálu $L_n f = s_n(f, 0)$ na prostoru spojitých 2π-periodických funkcí $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$! Je

$$\|L_n\| = \sup \Big\{ \Big| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, D_n(t) \, \mathrm{d}t \Big| \, ; \, \|f\| \le 1 \Big\} \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \|D_n\|_1 \, .$$

V tomto odhadu platí ve skutečnosti rovnost; odůvodněte ! Nyní normu $\|D_n\|$ odhadneme zdola: z nerovnosti $|\sin(t/2)| \le t/2$, $t \in (0, \infty)$, plyne

$$\|D_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} \right| \, \mathrm{d}t \ge \int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)t)| \, \frac{dt}{t} \, .$$

V posledním integrálu v předcházejícím vztahu proveďte substituci $u = (n+1/2)t$ a odhadněte (jednotlivé kroky zdůvodněte) :

$$\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u} \frac{(n+1/2)}{n} \, \mathrm{d}u > \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} \, \mathrm{d}u \ge$$

$$\ge \sum_{1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin u \, \mathrm{d}u = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, .$$

Z divergence harmonické řady dostáváme $\|L_n\| = \pi^{-1} \|D_n\| \to +\infty$ pro $n \to \infty$, takže normy $\|L_n\|$ nejsou stejně omezené.

Cvičení 63: Ověřte předpoklady Banach-Steinhausovy věty a odůvodněte závěr : Existuje $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, jejíž Fourierova řada alespoň v jednom bodě diverguje (Paul du Bois-Reymond, 1873). Platí dokonce více : *V* $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *existuje* (hustá) *množina funkcí, jejichž Fourierova řada diverguje na* husté *podmnožině* $\mathbb{R}$.

Cvičení 64: Vraťte se ke vzorci (Eu) a ukažte, že jde o Fourierovu řadu (nespojité) funkce na levé straně rovnosti, a že v bodech nespojitosti konverguje k 0 $\big(= \big(f(\pi+) + f(\pi-)\big)/2\big)$.

Cvičení 65: Dokázali jsme Weierstrassovu aproximační větu postupem, který užíval Landau. Důkaz si můžete zopakovat v textu, k němuž je přístup z obsahu prosincových cvičení.

Cvičení 66: V souvislosti s Weierstrassovou větou jsme se seznámili s větou, kterou Korovkin dokázal v r. 1953: *Nechť* $L_n\colon\mathcal{C}([\,a,b\,])\to\mathcal{C}([\,a,b\,])$, $n\in\mathbb{N}$, *jsou nezáporné lineární operátory takové, že posloupnost* $\{L_nf\}$ *konverguje stejnoměrně na* $[\,a,b\,]$ *k funkci* f *pro* $f=1$, Id, Id^2. *Potom posloupnost* $\{L_nf\}$ *konverguje stejnoměrně na* $[\,a,b\,]$ *k funkci* f *pro každou funkci* $f\in\mathcal{C}([\,a,b\,])$.

Cvičení 67: Bernstein r. 1912 dokázal $B_nf\rightrightarrows f$ na $[\,0,1\,]$ pro každou $f\in\mathcal{C}([\,0,1\,])$.

$$B_nf:x\mapsto\sum_{k=0}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,,\quad x\in[\,0,1\,]\,.$$

Z definice je zřejmé, že operátory $B_n:f\mapsto B_nf$ jsou na $\mathcal{C}([\,0,1\,])$ lineární, nezáporné a zobrazují tento prostor do prostoru polynomů.

Cvičení 68: Ukažte v následujících cvičeních, že posloupnost $\{B_nf\}$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[\,0,1\,]$ k funkci f pro tři funkce $f=1$, Id, a Id^2. Označme $f_k=\mathrm{Id}^{\,k}$, $k=0,\,1,\,2$.

Cvičení 69: Rovnost $B_nf_0=f_0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ plyne z binomické věty.

Cvičení 70: Uvažme dále, že pro $1\le k\le n$ je

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=\binom{n-1}{k-1}.$$

Pro f_1 dostaneme pomocí předchozí rovnosti

$$\begin{aligned}B_nf_1(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\\&=x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{(n-1)-j}=x\cdot1=f_1(x)\,,\quad x\in[\,0,1\,]\,,\end{aligned}$$

takže pro všechna $n\in\mathbb{N}$ je $B_nf_1=f_1$.

Cvičení 71: Dále spočteme pro $1\le k\le n$

$$\Big(\frac{k}{n}\Big)^2\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1};$$

a po úpravě dostaneme:

$$\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n-1}{n}\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}=\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\binom{n-2}{k-2}.$$

Po dosazení f_2 obdržíme pro všechna $x\in[\,0,1\,]$

$$B_nf_2(x)=\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

a pak jednoduchou úpravou postupně dostaneme

$$B_n f_2(x) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} =$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) x^2 + \frac{x}{n} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) f_2(x) + \frac{1}{n} f_1(x)\,;$$

Cvičení 72: Je-li $M \subset \mathbb{R}^m$ množina všech bodů, jejichž souřadnice jsou diadicky racionální čísla (jsou tvaru $k/2^l$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$), určete $\overline{M}$, M°, ∂M!

Cvičení 73: Jsou prostory $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ separabilní ? Je prostor s separabilní ?

Cvičení 74: Nechť ρ je *diskrétní* metrika na intervalu $(0,1)$. Je interval $(0,1)$ s metrikou ρ separabilní MP ?

Cvičení 75: Jsou prostory $m(=\ell^\infty)$, c, c_0 separabilní ?

Cvičení 76: Je prostor $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ separabilní ?

Cvičení 77: (*) Kromě elementárního důkazu (viz např. pomocný text či přednáška) vyplývá separabilita $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ i z Weierstrassovy aproximační věty. Jak věta zní ? (Dokážeme ji na cvičení).

Cvičení 78: Definujte ε-síť množiny M ! Najděte např. v prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ příklad množiny, která je omezená a přitom není totálně omezená !

Cvičení 79: Je prostor $m(=\ell^\infty)$, c, c_0 úplný ?

Cvičení 80: Na prostoru $\mathcal{C}([\,0,1\,])$ definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ operátory A_n tak, že pro každou funkci $x \in \mathcal{C}([\,0,1\,])$ položíme

$$A_n\, x\Big(\frac{k}{n}\Big) = x\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

a $A_n\, x$ je lineární funkce na intervalu $[\,(k-1)/n, k/n\,]$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$. Zjistěte, zda platí

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & A_n(x) \to x\,, \quad x \in \mathcal{C}([\,0,1\,])\,, \\ \text{(b)} & \|A_n - I\,\|_{\mathcal{C}([0,1])} \to 0\,, \end{array}$$

kde I je identický operátor na $\mathcal{C}([\,0,1\,])$.

Cvičení 81: Je prostor $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ úplný ?

Cvičení 82: Znáte Weierstrassovu větu o polynomiální aproximaci funkcí z prostoru $\mathcal{C}([\,0,1\,])$? Znáte ideu alespoň jednoho jejího důkazu ?

Cvičení 83: Je součin dvou separabilních metrických prostorů separabilní metrický prostor ?

Cvičení 84: Je součin dvou úplných metrických prostorů úplný metrický prostor ?

Cvičení 85: Je zobrazení $T : (P, \rho) \to (P, \rho)$, pro které platí

$$\rho(T(x), T(y)) < \rho(x, y)\,, \quad x, y \in P,$$

kontraktivní na (P, ρ) ?

Cvičení 86 $(*)$**:** Pro posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$$

s $a > 0$ jsme nalezli (velmi dávno) její limitu (připomeňte si!). Souvisí tento příklad nějak s kontraktivitou zobrazení ? Šlo by tento příklad zobecnit na případ n-té odmocniny ?

Cvičení 87: Připomeňme si Cantorovu větu v kontextu $\mathbb{R}$ i obecného metrického prostoru : *Nechť (P, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v prostoru P, tj. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť dále je*

$$\operatorname{diam}(A_n) \to 0\,. \tag{$*$}$$

Potom existuje právě jeden bod $x \in P$ takový, že $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Ukažte, že předpoklad $(*)$ je pro platnost věty podstatný. Postřehnete nějaký rozdíl proti klasické „jednorozměrné“ větě ? Ukažte, že i další předpoklady Cantorovy věty jsou podstatné, tj. že po vynechání monotonie nebo uzavřenosti A_n takto modifikované tvrzení neplatí !

Cvičení 88: Připomeňte si Arzalà-Ascoliho větu ! Jsou funkce z uzavřené jednotkové koule v prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ stejně spojité ?

Cvičení 89: Nechť je $\mathcal{F}$ systém všech funkcí z prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které mají na (a, b) všude vlastní derivaci a platí pro ni $\big|f'(x)\big| < \pi$, $x \in (a, b)$. Jsou funkce z $\mathcal{F}$ stejně spojité ?

Cvičení 90: Na přednášce jste si dokázali reálnou verzi Stone-Weierstrassovy věty: *Nechť $X \subset (P, \rho)$ je kompaktní a nechť $\mathcal{A}(X)$ je algebra reálných funkcí spojitých na X. Odděluje-li algebra $\mathcal{A}(X)$ body X a obsahuje-li i konstantní funkci 1, je $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X)) = \mathcal{C}(X)$.* K ní se váží následující cvičení.

Cvičení 91: Je prostor $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ všech spojitých funkcí na intervalu $[\,a, b\,]$ současně algebrou ? Odděluje tato algebra body intervalu $[\,a, b\,]$?

Cvičení 92: Také algebra $\mathcal{P}([\,a, b\,])$ všech (restrikcí) polynomů na $[\,a, b\,]$ odděluje body $[\,a, b\,]$, je však vlastní podalgebrou $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Co tvrdí v tomto kontextu Weierstrassova věta o jejím uzávěru $\operatorname{cl}(\mathcal{P}([\,a, b\,]))$ ve vztahu k algebře $\mathcal{C}([\,a, b\,])$?

Cvičení 93: Systém všech funkcí z $\mathcal{P}([\,a, b\,])$, které se anulují v bodě $(a + b)/2$, odděluje body $[\,a, b\,]$, avšak tato algebra neobsahuje všechny konstantní funkce na $[\,a, b\,]$.

Cvičení 94: Systém všech funkcí z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které se anulují v bodě $(a + b)/2$, odděluje body $[\,a, b\,]$, a je to algebra $\mathcal{A}$. Co je uzávěrem této algebry ?

Cvičení 95: Systém $\mathcal{B}$ všech funkcí z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$, které se anulují ve dvou různých bodech $x,y \in [\,a,b\,]$, je algebra která neodděluje body intervalu $[\,a,b\,]$. Co je jejím uzávěrem? [Uzávěr $\mathrm{cl}(\mathcal{B})$ systému $\mathcal{B}$ obsahuje pouze ty funkce z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$, které leží v $\mathcal{B}$.]

Cvičení 96: Systém $\mathcal{P}$ všech *polynomů* z $\mathcal{B}$ obsahuje pouze jedinou konstantní funkci $f \equiv 0$, ale $\mathrm{cl}\,(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$, ale je to opět algebra.

Cvičení 97: K čemu jsme použili pojem tzv. ε-přibližného řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x,y)\,? \tag{$\heartsuit$}$$

Připomeňme, že je-li funkce f v rovnici ($\heartsuit$) spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a ψ je *spojitá* funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pro kterou $[\,t,\psi(t)\,] \in G$ pro všechna $t \in I$, pak pokud platí pro $\varepsilon > 0$ a všechna $t \in I \setminus K$

$$|\,\psi'(t) - f(t,\psi(t))\,| \le \varepsilon\,, \tag{$\spadesuit$}$$

kde $K \subset I$ je *konečná* množina, nazýváme funkci ψ *ε-přibližným řešením* rovnice ($\spadesuit$).