Poznámka 13.2.21. Čtenář snadno předcházející tvrzení zobecní: Je-li I interval v $\mathbb{R}$, který je uzavřenou množinou v $\mathbb{R}$, $f(I) \subset I$, kde f je spojité zobrazení a f má v každém vnitřním bodě $x \in I$ derivaci takovou, že $|f'(x)| < 1$, pak rovnice $f(x) = x$ má jediné řešení. Podstatně hlubší aplikaci Věty 13.2.18 o pevném bodu ukážeme v Kapitole 15.

V souvislosti s Příklady 13.1.2 se ještě informativně zmíníme o „velkých“ a „malých“ množinách v topologickém smyslu. Tato partie má řadu zajímavých aplikací, např. v teorii reálných funkcí. Příklad (2) 13.1.2 naznačil jednu obtíž spočívající v tom, že množina $\mathbb{Q}$ není uzavřená v $\mathbb{R}$.

Definice 13.2.22. Říkáme, že $A \subset P$ je *řídká v prostoru* (P, ϱ), jestliže

$$\overline{P \setminus \overline{A}} = P\,,$$

tj. uzávěr doplňku $\overline{A}$ je celý prostor P, neboli doplněk uzávěru A je hustý v P.

Důsledek 13.2.23. *Je-li A řídká množina a $\overline{A} = \overline{B}$, je B také řídká množina. Speciálně to platí např. když $A \subset B \subset \overline{A}$.*

Lemma 13.2.24. *Je-li $A \subset B \subset P$ a B je řídká množina, je řídká i množina A.*

Důkaz. Zřejmě je $\overline{A} \subset \overline{B}$, takže $P \setminus \overline{B} \subset P \setminus \overline{A}$. Odtud dostaneme

$$P = \overline{P \setminus \overline{B}} \subset \overline{P \setminus \overline{A}}\,,$$

a množina A je tudíž řídká. □

Lemma 13.2.25. *Je-li množina $A \subset (P, \varrho)$ hustá a otevřená, je její komplement $P \setminus A$ řídká množina.*

Důkaz. Je-li A hustá a otevřená, je

$$P = \overline{A} = \overline{P \setminus (P \setminus A)} = \overline{P \setminus \overline{(P \setminus A)}}\,,$$

z čehož již plyne tvrzení lemmatu. □

Věta 13.2.26. *Množina $A \subset P$ je řídká, právě když pro každou $\emptyset \neq G \subset P$ otevřenou existuje $\emptyset \neq G_1 \subset G$ otevřená, pro niž $G_1 \cap A = \emptyset$.*

Důkaz. Je-li množina A řídká, je podle Definice 13.2.22 $P \setminus \overline{A}$ hustá množina. Proto pro každou otevřenou množinu $G \neq \emptyset$ je $G_1 := G \cap (P \setminus \overline{A})$ podle Věty 13.1.3 neprázdná a otevřená, přičemž zřejmě $A \cap G_1 \subset A \cap (P \setminus \overline{A}) \subset A \cap (P \setminus A) = \emptyset$, takže podmínka je splněna.

Není-li množina A řídká, není $P \setminus \overline{A}$ hustá. Proto existuje otevřená $\emptyset \neq G \subset P$ tak, že $G \cap (P \setminus \overline{A}) = \emptyset$, tj. $G \subset \overline{A}$ (a mj. je $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$). Nyní stačí ukázat, že pro každou $\emptyset \neq G_1 \subset G$ je $G_1 \cap A \neq \emptyset$. To dokážeme sporem: Z $G_1 \cap A = \emptyset$ plyne $A \subset P \setminus G_1$, a tedy $G_1 \subset G \subset \overline{A} \subset \overline{P \setminus G_1} = P \setminus G_1$, z čehož vyplývá $G_1 = \emptyset$; nalezený spor dokazuje druhou část tvrzení. □

Někdy se jako kritérium řídkosti může hodit ekvivalentní vlastnost, kterou popíšeme v následujícím tvrzení.

Lemma 13.2.27. *Množina $A \subset P$ je řídká, právě když $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.*

Důkaz. Pokud množina A není řídká, dokázali jsme v průběhu předcházejícího důkazu, že $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$. Vnitřek $(\overline{A})^\circ$ je otevřená množina pro každou $A \subset P$ a jestliže je A řídká, je

$$P \setminus (\overline{A})^\circ \supset \overline{P \setminus \overline{A}} = P\,, \quad \text{a tedy } P \setminus (\overline{A})^\circ = P\,, \quad \text{nebo-li } \; (\overline{A})^\circ = \emptyset\,;$$

tím je tvrzení lemmatu dokázáno. □

Definice 13.2.28. Existují-li $A_n \subset P$ řídké v (P, ϱ) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, že je $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, nazývá se A *množinou 1. kategorie* (v Baireově smyslu).

Poznámka 13.2.29. Zřejmě je každá řídká množina v P také množinou 1. kategorie a všechny množiny 1. kategorie tvoří systém, který je uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením. V úplných MP jsou množiny 1. kategorie „malé“. Toho lze, jak uvidíme dále, využít v existenčních důkazech.

Věta 13.2.30 (Baire 1899). *Nechť (P, ϱ) je úplný prostor a nechť $\{\, G_k\,;\, k \in \mathbb{N}\,\}$ je systém otevřených hustých podmnožin P. Potom i $G := \bigcap_{k=1}^\infty G_k$ je hustá.*

Důkaz. Zvolme libovolně $\emptyset \neq H$ otevřenou v (P, ϱ) a dokažme, že $G \cap H \neq \emptyset$; tím bude s ohledem na 13.1.3 tvrzení dokázáno.

Protože G_1 je otevřená hustá, je $H \cap G_1 \neq \emptyset$ otevřená, a existuje tedy otevřená koule $B_1 = B(x_1, r_1)$ ležící i se svým uzávěrem v $G_1 \cap H$.

Protože G_2 je otevřená hustá, je $B_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ otevřená, a existuje tedy otevřená koule $B_2 = B(x_2, r_2)$ ležící i se svým uzávěrem v $G_2 \cap B_1 \subset G_2 \cap (G_1 \cap H)$.

Takto postupujeme dále: Je-li již vybrána B_{k-1}, pak z hustoty otevřené G_k plyne existence koule $B_k = B(x_k, r_k)$ ležící i se svým uzávěrem v množině

$$G_k \cap B_{k-1} \subset \cdots \subset G_k \cap \big(G_{k-1} \cap \cdots \cap G_1 \cap H\big)\,.$$

Je zřejmé, že poloměry r_k koulí B_k lze přitom volit tak, že $r_k \to 0$, takže i $\operatorname{diam}(\overline{B_k}) \to 0$. Nyní na uzávěry $\overline{B_k}$ užijeme Cantorovu Větu 13.2.12 a dostaneme tak existenci bodu v $H \cap G$. Tím, že je tato množina neprázdná, jsme důkaz dokončili. □

Věta 13.2.31 (Baire 1899). *Úplný metrický prostor (P, ϱ) není 1. kategorie.*

Důkaz. Protože A je řídká, právě když je $P \setminus \overline{A}$ hustá, pro každou posloupnost $\{A_k\}$ řídkých množin, jsou množiny $(P \setminus \overline{A_k})$ otevřené a husté v (P, ϱ). Podle Věty 13.2.30 pak dostaneme

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^\infty \big(P \setminus \overline{A_k}\big) = P \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \overline{A_k} \subset P \setminus \bigcup_{k=1}^\infty A_k\,,$$

takže (P, ϱ) nemůže být 1. kategorie. □

Poznámka 13.2.32 (důležitá). Množiny, které nejsou množinami 1. kategorie, se nazývají *množiny* 2. *kategorie*. Podle vyslovené věty je tedy úplný metrický prostor (v sobě) 2. kategorie. Doplňkem množiny 1. kategorie v prostoru 2. kategorie *nemůže být* množina 1. kategorie. Na tom je založena metoda důkazu existence funkcí s jistou zajímavou vlastností, která bývá velmi často nazývána *metoda kategorií.* Při důkazu postupujeme podle tohoto obecného principu:

(1) vybere se vhodný prostor funkcí, který je *úplným* metrickým prostorem (P, ϱ), a

(2) ukáže se, že všechny prvky (P, ϱ), které zkoumanou vlastnost nemají, tvoří v (P, ϱ) množinu 1. kategorie.

Předcházející věta pak říká, že v P existuje alespoň jeden prvek, který zkoumanou vlastnost má.

Pokud je A množina 1. kategorie, nazývá se často množina $P \setminus A$ *reziduální*; ta je v prostoru, který je 2. kategorie, také množinou 2. kategorie (je zřejmé, že systém všech množin 1. kategorie je uzavřený vzhledem ke sjednocení konečně mnoha prvků). V takovém případě též říkáme, že vlastnost určující příslušnost prvků k $P \setminus A$, je *typickou* vlastností prvků P.

Tak lze např. dokázat, že existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě (vlastní) derivaci, nebo která není monotónní na žádném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a řada dalších zajímavých tvrzení. My takovou funkci, která je spojitá na $\mathbb{R}$ a nemá v žádném bodě konečnou derivaci, později zkonstruujeme v Kapitole 14; právě popsaný postup vede kromě tvrzení o existenci i k poznání, že takových funkcí je v prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ v jistém smyslu „velmi mnoho“.

Lemma 13.2.33. *Množina všech funkcí $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$, které jsou monotónní na nějakém intervalu $(\alpha, \beta) \subset [\,a, b\,]$, je 1. kategorie v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.*

Důkaz. Protože každá funkce, která je monotónní na nějakém otevřeném intervalu ležícím v $[\,a, b\,]$, je monotónní i na nějakém otevřeném intervalu v $[\,a, b\,]$ s *racionálními koncovými body*, můžeme pracovat pouze s takovými intervaly. Tyto intervaly tvoří spočetnou množinu $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Označme A_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu všech funkcí, které jsou monotónní na intervalu I_n. Množiny A_n jsou uzavřené; k tomu stačí dokázat, že jejich doplňky jsou otevřené množiny. Pokud $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$ *není* monotónní v intervalu I_n, existují body $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I_n$ tak, že

$$(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) > 0\,, \quad (f(x_4) - f(x_3))(x_4 - x_3) < 0\,.$$

Pro $r < \min(|f(x_2) - f(x_1)|, |f(x_4) - f(x_3)|)/2$ leží celá koule $B(f, r)$ v doplňku A_n, a proto je tento doplněk otevřená množina.

Množiny A_n jsou řídké v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$: K tomu stačí pro dané $n \in \mathbb{N}$ nalézt k $\varepsilon > 0$ a k libovolné funkci $f \in A_n$ funkci $g \in (\mathcal{C}([\,a, b\,]) \setminus A_n)$ tak, aby $\|\,f - g\,\|_\infty < \varepsilon$. K libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ a např. k neklesající funkci f na I_n existují v I_n body $x_1 < x_2$ tak, že $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon/2$. Monotonii f lze „porušit“ přičtením k f po částech lineární funkce h, nabývající v bodě x_1 hodnoty $h(x_1) = \varepsilon$ a v bodě x_2 hodnoty $h(x_2) = 0$, lineární na $[\,x_1, x_2\,]$ a konstantní na intervalech doplňku $I_n \setminus (x_1, x_2)$. Pak je $\|h\| = \varepsilon$ a lze definovat $g = f + h$, takže $g(x_1) > g(x_2)$. Proto je doplněk $\mathcal{C}([\,a, b\,]) \setminus A_n$ hustý v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ a je to otevřená množina, takže podle Lemmatu 13.2.25 je A_n řídká. Množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je tedy množinou 1. kategorie a tvrzení je dokázáno. ☐

Důsledek 13.2.34. *Množina všech spojitých monotónních funkcí z prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ je 1. kategorie v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, takže typická funkce z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ není monotónní na žádném nedegenerovaném intervalu ležícím v $[\,a, b\,]$.*

Příklad 13.2.35. Dokážeme, že typická funkce z $\mathcal{C}([a,b])$ nemá v žádném bodě intervalu $[a,b]$ konečnou jednostrannou derivaci. Označme A^+ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{C}([a,b])$, pro něž existuje *vlastní* $f'_+(x)$ v nějakém bodě $x \in [a,b)$. Analogicky označme A^- množinu všech těch funkcí f, pro něž existuje vlastní $f'_-(x)$ v nějakém bodě $x \in (a,b]$.

Abychom dokázali, že funkce z doplňku $\mathcal{C}([a,b]) \setminus A$, kde $A := A^+ \cup A^-$, jsou typické, stačí ukázat že obě množiny A^+ i A^- jsou 1. kategorie v $\mathcal{C}([a,b])$. Provedeme to pro množinu A^+, pro množinu A^- je důkaz obdobný a lze ho převést na prvý případ. Důkaz rozdělíme do několika kroků (je vhodné si pomoci náčrtky):

1. Položíme-li pro $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{ f \in \mathcal{C}([a,b])\,;\, (\exists x \in [a,b-1/n])\, (\forall h \in (0,1/n)) \left(\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \le n \right) \right\},$$

je $A^+ \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Inkluzi dokážeme, pokud k funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ s vlastní $f'_+(x)$ v nějakém bodě $x \in [a,b)$ najdeme A_n, v níž tato funkce leží. Zřejmě existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_1$ je $x < b - 1/n$; dále existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_2$ je $|f'_+(x)| < n$ a $n_3 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_3$

$$h \in (0,1/n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} \le n\,.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Potom pro všechna $n \ge n_0$ leží f v A_n. Dále dokážeme, že množiny A_n jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ uzavřené a řídké.

2. Zvolme pevně n a ukažme, že $A_n = \overline{A_n}$. K tomu postačí ukázat, že

$$\big(f_k \in A_n,\ f_k \to f \text{ v } \mathcal{C}([a,b])\big) \Longrightarrow f \in A_n\,,$$

neboli že

$$(\exists x \in [a,b-1/n])\, (\forall h \in (0,1/n))\, (|f(x+h)-f(x)| \le nh)\,. \tag{13.6}$$

Zvolíme nyní libovolně konvergentní posloupnost funkcí $f_k \in A_n$ a k těmto funkcím ty body $x_k \in [a,b-1/n]$, pro něž

$$(\forall h \in (0,1/n))(|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \le nh)\,.$$

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_k \to x_0$, $x_0 \in [a,b-1/n]$, čehož lze dosáhnout přechodem k vybrané konvergentní posloupnosti z $\{x_k\}$ odpovídající $\{f_k\}$. Nyní budeme odhadovat pro $h \in (0,1/n)$:

$$\begin{aligned} |f(x_0+h) - f(x_0)| \le{} & |f(x_0+h) - f(x_k+h)| + |f(x_k+h) - f_k(x_k+h)| + \\ & + |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| + \\ & + |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)|\,. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Výraz na druhém řádku (13.7) je pro $h \in (0,1/n)$ shora odhadnut číslem nh, ostatní výrazy v nerovnosti vpravo konvergují pro $k \to \infty$ k 0: první a poslední vzhledem ke spojitosti f v bodech $x_0 + h$ a x_0, druhý a čtvrtý vzhledem k $f_k \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, neboť konvergence v $\mathcal{C}([a,b])$ je stejnoměrná. Proto pro f dostáváme (13.6) s $x = x_0$, takže $f \in A_n$.

3. Nyní stačí podle Lemmatu 13.2.25 dokázat, že komplement $\mathcal{C}([a,b]) \setminus A_n$ je hustá množina pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme pevně n a popišme, jak ke každé $f \in \mathcal{C}([a,b])$ sestrojit v $C := \mathcal{C}([a,b]) \setminus A_n$ posloupnost funkcí $\{f_k\}$ konvergentní k f. I když je to pro $f \in C$ triviální (stačí volit konstantní posloupnost s $f_k = f$), uděláme to najednou pro jakoukoli $f \in \mathcal{C}([a,b])$. K tomu stačí ukázat, jak k $\varepsilon > 0$ nalézt $g \in C$ tak, že $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Funkci g sestrojíme postupně: nejprve k f sestrojíme „blízko“ funkci ℓ s odhadnutelnou derivací zprava a k této funkci přičteme „malou pilovitou funkci“ s_m s vhodným m tak, abychom dostali $g = \ell + s_m \notin A_n$. Nyní tuto ideu zpřesníme.

K dané funkci f najdeme analogicky jako v Příkladu 13.1.6 po částech lineární funkci ℓ tak, aby $\| f - \ell \|_\infty < \varepsilon/2$. Funkce ℓ má v každém bodě $x \in [a,b)$ vlastní derivaci zprava a existuje $M \in (0,+\infty)$ tak, že pro všechna tato x je $|\,\ell'_+(x)\,| \le M$. Nyní pro každé $m \in \mathbb{N}$ zvolme ekvidistantní dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$, $D = \{\, a = t_0 < t_1 \cdots < t_{2m} = b\}$ a v jeho dělicích bodech položme

$$s_m(t_v) := \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - (-1)^v\right), \quad v = 1, 2, \ldots, 2m\,.$$

Funkce s_m mají derivaci zprava ve všech bodech $x \in [a,b)$ a absolutní hodnota této derivace je konstantní; je rovna $m\varepsilon/(b-a)$ a pro $m \to \infty$ má limitu $+\infty$. Nyní zvolíme funkci s_m s tak velkým indexem m, aby

$$(s_m + \ell)'_+(x) > n \quad \text{pro všechna} \quad x \in [a,b)\,,$$

Položíme-li $g := \ell + s_m$, je $g \notin A_n$ a zároveň $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že A_n je řídká množina pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznamenejme na závěr, že existují i funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$, které nemají v žádném bodě z $[a,b]$ derivaci (tedy ani vlastní, ani nevlastní), ale ty tvoří v $\mathcal{C}([a,b])$ množinu 1. kategorie a jejich konstrukce je velmi složitá. Jak se později ukáže, každá z těch funkcí, kterými jsme se zabývali v tomto příkladu, je i funkcí, která není monotónní na žádném otevřeném intervalu $I \subset [a,b]$; monotónní funkce na I mají vlastní derivaci všude v I až na množinu nulové Lebesgueovy míry.

13.3 Kompaktní prostory

Poznámka 13.3.1. Připomeňme, že jsme se domluvili, že každou $M \subset (P,\varrho)$ lze přirozeným způsobem chápat jako MP. Uveďme nejprve užitečnou charakteristiku pro otevřené a uzavřené množiny v M.

Lemma 13.3.2. *Je-li $A \subset M \subset (P,\varrho)$, pak A je uzavřená v M, právě když existuje uzavřená F v P tak, že $A = M \cap F$. Je-li $A \subset M \subset (P,\varrho)$, pak A je otevřená v M, právě když existuje otevřená G v P tak, že $A = M \cap G$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat pouze jedno z tvrzení, neboť druhé dostaneme jednoduchou úvahou o doplňcích. Dokažme např. tvrzení o uzavřenosti. Budeme pracovat s uzávěry vzhledem k ϱ v M a P, proto je rozlišíme přidáním označení k pruhu, který značí uzávěr. Zřejmě je

$$\overline{A}^{\,M} = M \cap \overline{A}^{\,P}\,,$$