Příklady ke cvičení z MMA – ZS 2012/13

(středa, **M3**, 9:50 – 11:20)

Poznámka $(*)$ **:** Pokud nebude uvedeno jinak budeme vždy pracovat s prostory nad tělesem $T = \mathbb{R}$. Ve všech ostatních případech (tj. při $T = \mathbb{C}$), bude těleso explicitně specifikováno. Budeme používat některé zkratky: MP pro metrický prostor(-y), NLP pro normovaný prostor(-y), UP pro prostor se skalárním součinem (unitární prostor), TP pro topologický prostor apod. Později zavedeme ještě další zkratky.

Cvičení 1: Pokud je metrika ρ na NLP X definována příslušnou normou, má speciální vlastnosti: pro všechna $x, y, z \in X$ a všechna $\alpha \in T$ platí

$$\rho\,(x, y) = \rho\,(x + z, y + z)\,, \quad \rho\,(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\,\rho\,(x, y)\,.$$

Proč? Znáte nějakou metriku na LP, která tuto vlastnost nemá? Má-li metrika na LP tyto dvě vlastnosti, je generována nějakou normou?

Cvičení 2: Vlastnosti normy „kopírují“ vlastnosti absolutní hodnoty na $\mathbb{R}$. Uvědomte si trojúhelníkovou nerovnost pro normu, resp. její části, pokud ji zapisujete v „obsažnějším“ tvaru

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\|\,,$$

Tuto složenou nerovnost budeme často používat. ze které plyne spojitost normy. Lze dokázat, že všechny normy na LP n-tic reálných (komplexních) čísel jsou ekvivalentní!

Cvičení 3: Připomeňte zavedení skalárního součinu na LP X! Vlastnosti budeme obvykle zapisovat ve tvaru:

$$(x, x) \ge 0\,, (x, x) = 0\,, \text{ právě když } x = 0\,,$$
$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)\,,$$
$$(x, y) = (y, x)\,, \text{ resp. } (x, y) = \overline{(y, x)}\,,$$

přičemž poslední vztah užíváme v případě, že pracujeme na LP nad $\mathbb{C}$. Normu na X pak definujeme vztahem $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ a používáme zkratku UP.

Cvičení 4: Dokažte, že norma generovaná skalárním součinem na UP splňuje podmínku: pro všechna $x, y \in X$ je

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,;$$

(tzv. rovnoběžníkové pravidlo; ukažte, že tento název má své opodstatnění). Existuje normovaný lineární prostor (NLP), ve kterém norma tuto podmínku nesplňuje?

Jestliže norma na NLP X (nad $\mathbb{R}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, lze odpovídající skalární součin definovat takto: položíme

$$p(x, y) := \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big)\,;$$

funkce p na $X \times X$ je již hledaným skalárním součinem. Ukažte, že obecně přes „definici“ součinu $(x, y) := (1/2)\big(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$ cesta nevede. V případě, že pracujeme s prostorem X nad $\mathbb{C}$, je $p(ix, y) = -p(x, iy)$ a hledaný skalární součin má tvar

$$(x, y) := p(x, y) - ip(ix, y).$$

Důkaz odpovídajícího tvrzení vyžaduje trochu práce.

Cvičení 5: Dokažte, že na UP platí tzv. Schwarzova nerovnost

$$\big|(x,y)\big| \le \|x\|\,\|y\|\,!$$

Cvičení 6: Pro normu na (komplexním) UP dokažte pomocí Schwarzovy nerovnosti trojúhelníkovou nerovnost!

Cvičení 7: Prostor m je tvořen všemi omezenými posloupnostmi, prostor c všemi konvergentními posloupnostmi, prostor c_0 všemi posloupnostmi konvergentními k 0 a prostor s_0 všemi posloupnostmi, které mají pouze konečný počet nenulových členů. Ve všech lze zavést pro $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} =: \{x_k\}$ normu vztahem

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup\{\,|x_k|\,;\,k \in \mathbb{N}\,\}$$

(Můžeme pracovat s posloupnostmi reálných nebo komplexních čísel.) Jestliže $X \subset\subset Y$ značí vztah X je lineárním podprostorem Y, je zřejmě

$$s_0 \subset\subset c_0 \subset\subset c \subset\subset m \subset\subset s\,,$$

kde s je LP všech posloupností čísel (z $\mathbb{R}$ nebo z $\mathbb{C}$).

Cvičení 8: Normu v prostoru všech n-tic reálných (nebo komplexních) čísel lze pro $p \ge 1$ zavést předpisem

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Ukažte, že je

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\big\{|x_k|\,;\,k \in \{1,\dots,n\}\big\} = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p\,.$$

Tyto prostory značíváme ℓ_n^p (je tedy $\ell_n^\infty \subset\subset m$).

Cvičení 9: Analogicky zavádíme pro $p \ge 1$ prostory posloupností: Na lineárním prostoru ℓ^p všech posloupností $\mathbf{x} = \{x_k\}$, pro něž je $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ definujeme

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Při použití tohoto označení je rozumné klást $\ell^\infty = m$ z analogických důvodů jako ve Cvičení 7.

Cvičení 10: Zaveďte na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nezápornou funkci $\sigma(x,y)$ předpisem

$$\sigma(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,!$$

Všimněte si, že je omezená a ukažte, že σ je metrika $\mathbb{R}$!

Cvičení 11: Zobecněte předchozí úlohu a dokažte, že je-li $\rho = \rho(x, y)$ metrika na MP X, je také

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

(omezená) metrika na X. To nám dává možnost zavést omezenou metriku na jakémkoli MP. Přitom se tato metrika od původní liší jen „nepodstatně" – k této konstrukci se ještě vrátíme.

Cvičení 12: Je poměrně vžité užívání standardního označení pro prostory všech posloupností reálných, resp. komplexních čísel, které pak uvažujeme jako prostory nad $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. Tento prostor lze opatřit matrikou ρ např. tak, že pro všechna $x, y \in X$ položíme

$$\rho(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Tento prostor budeme značit s.

Cvičení 13: Systém $\mathfrak{B}$ všech otevřených množin metrického prostoru (X, ρ) má tyto vlastnosti:

(a) $\emptyset, X \in \mathfrak{B}$,

(b) sjednocení libovolného podsystému systému $\mathfrak{B}$ je prvkem $\mathfrak{B}$, a

(c) průnik konečného podsystému systému $\mathfrak{B}$ je prvkem $\mathfrak{B}$.

Všimněte si, že pro libovolnou dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, lze nalézt $U_x, U_y \in \mathfrak{B}$ tak, že $x \in U_x$, $y \in U_y$ a $U_x \cap U_y = \emptyset$ (systém $\mathfrak{B}$ *odděluje body* prostoru X).

Cvičení 14: Libovolný systém $\mathfrak{B}$ podmnožin množiny X s vlastnostmi (a), (b), (c) z předcházejícího cvičení se nazývá *topologie* (na X). Topologii na X velmi často značíme τ a dvojici (X, τ) nazýváme *topologický prostor*. Prvky systému τ jsou otevřené množiny (X, τ) a pomocí nich lze zavést v (X, τ) řadu pojmů, které znáte z teorie MP (pozor, vše „nefunguje" zcela analogicky jako v MP !).

Cvičení 15: Triviálními topologiemi na X jsou např. systémy $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ nebo systém $\tau_2 = \mathfrak{P}(X)$ všech podmnožin množiny X. Které funkce na (X, τ_1) nebo na (X, τ_2) jsou spojité? Je-li $\#(X) \geq 2$, τ_1 neodděluje body X. (Problém možnosti vytvořit topologii metrikou nebudeme blíže zkoumat.)

Cvičení 16: Ukažte, že v s platí: je-li $x_k \to x_0$ v s a $\alpha_k \to \alpha_0$ v T, pak $\alpha_k x_k \to \alpha_0 x_0$.

Cvičení 17: V tomto cvičení zobecníme Schwarzovu nerovnost na $\mathbb{R}^m$: pro každá čísla $p, q \in (0, \infty)$ splňující podmínku $p + q = p\,q$, neboli

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1\,,$$

a každé dva body $[\,x_1, \dots, x_m\,]$, $[\,y_1, \dots, y_m\,]$ z $\mathbb{R}^m$ platí Hölderova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{m} |\, x_k y_k \,| \leq \Big(\sum_{k=1}^{m} |\, x_k \,|^p \Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |\, y_k \,|^q \Big)^{1/q}.$$

Cvičení 18: Pro každé p, $1 < p < \infty$, a pro každou dvojici bodů $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,]$, $y = [\,y_1, \ldots, y_m\,]$ z $\mathbb{R}^m$ platí nerovnost Minkowskiho (česky Minkowského)

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,y_k\,|^p\Big)^{1/p}.$$

Jaký je její význam v kontextu MP ?

Cvičení 19: Dokažte Hölderovu a Minkovskiho nerovnost pro prostory posloupností ℓ^p (tj. obdobné nerovnosti pro nekonečné řady) !

Cvičení 20: Připomeňte definici otevřené a uzavřené koule a sféry v kontextu MP. V diskrétním MP „jednotková sféra obsahuje libovolně mnoho disjunktních otevřených jednotkových koulí“.

Cvičení 21: Připomeňte si definici *diametru množiny.* Proč je součástí definice část, vymezující speciálně $\operatorname{diam}(\emptyset)$? Všimněte si vztahů mezi „poloměrem“ a „průměrem“ koule v diskrétním prostoru !

Cvičení 22: Jak popisujeme vzájemný vztah bodu a množiny v MP ? Připomeňte si definici vnitřního, vnějšího a hraničního bodu množiny ! Jak se definuje hromadný bod množiny ?

Cvičení 23: Jak definujeme spojitost a limitu funkce, definované na MP ? Proč nemůžeme definovat limitu funkce vzhledem k množině v jejím izolovaném bodě ?

Cvičení 24: Definice *vzdálenosti množin* M, N v MP (P, ρ) je $(M, N \neq \emptyset)$

$$\operatorname{dist}(M, N) := \inf\{\rho(x, y)\,;\, x \in M,\ y \in N\}\,.$$

Často zjednodušujeme, zde např. píšeme $\operatorname{dist}(x, A)$ místo $\operatorname{dist}(\{x\}, A)$ a mluvíme o vzdálenosti bodu od množiny.

Cvičení 25: Označme $d_A(x)$ pro neprázdnou množinu $A \subset (P, \rho)$ vzdálenost bodu x od množiny A. Dokažte nerovnost

$$\big|\, d_A(x) - d_A(y)\,\big| \le \rho(x, y)\,.$$

Je-li $x \in A$, je $d_A(x) = 0$. Lze toto tvrzení obrátit, tj. plyne z $d_A(x) = 0$, že $x \in A$?

Cvičení 26: Najděte dvě disjunktní množiny v $\mathbb{R}$ s nulovou vzdáleností ! Je pro $r > 0$ vzdálenost $B(x, r)$ a $K(x, r)$ vždy 0 ? Je pro $r > 0$ vzdálenost $B(x, r)$ a $S(x, r)$ vždy 0 ? Je pro $r > 0$ vzdálenost $S(x, r)$ a $K(x, r)$ vždy 0 ?

Cvičení 27: Lze volit M, N neprázdné *uzavřené* v $\mathbb{R}^n$ s $\operatorname{dist}(M, N) = 0$ disjunktní ?

Cvičení 28: Je vzdálenost $d_A(x)$ bodu od množiny spojitá funkce ? Lze ji nějak využít, např. k popisu uzávěru $\overline{A}$ množiny A ?

Cvičení 29: Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ (jde pouze o označení, nikoli o „p-čkové" normy!) na LP X takové, že existují kladné konstanty C, D a pro všechna $x \in X$ platí

$$C\| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq D\| x \|_1$$

se nazývají *ekvivalentní normy* na X. Uveďte příklady! Je to symetrický vztah?

Cvičení 30: Na prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ lze definovat supremovou a integrální normu. Zkoumejte vztahy mezi nimi. Jsou tyto normy ekvivalentní?

Cvičení 31: Jsou normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_\infty$ na $\mathbb{R}^m$ ekvivalentní? Co lze říci o normách $\|\cdot\|_p$ pro obecné p?

Cvičení 32: Zamyslete se nad možnostmi vytváření dalších MP. Jsou-li (P,ρ) a (Q,σ) dva MP, lze zavést nějak přirozeně metriku na $P \times Q$?

Cvičení 33: Je-li (P,ρ) MP a definujeme-li

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\,,$$

je $\sigma(x,y) \leq \rho(x,y)$. Není-li (P,ρ) omezený, *nelze nalézt* kladné konstanty C, D tak, aby

$$C\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq D\rho(x,y)$$

pro všechna $x,y \in (P,\rho)$ (Proč?).

Cvičení 34: Metriky z předcházejícího příkladu jsou i jinak odlišné: je-li ρ generována normou, σ tuto vlastnost nemá.

Cvičení 35: Říkáme, že metriky ρ a σ jsou na prostoru P ekvivalentní, platí-li pro každou posloupnost bodů $x_n \in P$ a každé $x \in P$ ekvivalence

$$\lim x_n = x \text{ v } (P,\rho) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim x_n = x \text{ v } (P,\sigma)\,.$$

Ukažte, že pro metriky ze Cvičení 11 je

$$(1/2)\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq \rho(x,y)$$

pro všechna $x \in (P,\rho)$ a ta $y \in (P,\rho)$, pro něž je

$$\rho(x,y) < 1\,.$$

Cvičení 36: Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ jsou izometricky izomorfní. Co si pod tím představíte?