

MATEMATIKA PRO PŘÍRODNÍ VĚDY

LINEÁRNÍ ALGEBRA, DIFERENCIÁLNÍ POČET

koncepce/slides: Jan Pícek

přednášející: Jiří Veselý

KAP, tel. 485352290, budova H

konzul. hodiny: dle úmluvy

e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz

cvičící:

Milan Cvrček, Staněk Jan,

Zedek Lukáš

Požadavek na udělení zápočtu:

V průběhu semestru budou znalosti prověřovány dvěma testy z probírané látky. Termín každého testu bude dopředu oznámen cvičícím. Pro udělení zápočtu je nutné získat alespoň poloviční počet bodů z každého testu.

Požadavky ke zkoušce:

Znalost řešení úloh, vyložených pojmů a jejich vlastností v rozsahu daném přehledem přednášek.

Literatura:

- NEKVINDA M.: *Matematika. Část 1.* Liberec, Technická univerzita v Liberci, 2001.
- NEKVINDA M., VILD J.: *Matematické oříšky 1.* Liberec, Technická univerzita v Liberec, 2006.
- BITTNEROVÁ, D., PLAČKOVÁ G.: *Louskáček. Část 1, Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné.* Liberec, Technická univerzita v Liberci, 2005.

- HRUBÝ D., KUBÁT J.: *Matematika pro gymnázia : diferenciální a integrální počet*. Praha, Prometheus, 2004.
- KADEŘÁBEK J.: *Základy matematiky : Studijní texty pro distanční bakalářské studium – textilní marketing*. Liberec, Technická univerzita v Liberci, 1999.
- REKTORYS K.: *Přehled užití matematiky*. Praha, Prometheus, 2000.

- CALDA E., DUPAČ V.: *Matematika pro gymnázia : kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Praha, Prometheus, 2004.
- KADEŘÁBEK J.: *Statistika*, Technická univerzita v Liberci, 2006.
- KADEŘÁBEK, J. – PICEK, J.: *Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a statistiky*. Liberec, Technická univerzita v Liberci, 2001.

Internetové zdroje :

[http://matematika-online-a.kvalitne.cz/
linearni-algebra.htm](http://matematika-online-a.kvalitne.cz/linearni-algebra.htm)

[http://mathonline.fme.vutbr.cz/
Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/
default.aspx](http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx)

<http://www.e-matematika.cz/>

LINEÁRNÍ ALGEBRA

Matematika :

specifika

různé charakteristiky

náročnost

jak ji studovat

dobře seřazené jednoduché věci

Motivace:

$$2x + 3y = 5$$

$$4x + 5y = 9$$

$$4x + 6y = 10$$

$$4x + 5y = 9$$

$$x = 1, y = 1$$

Modifikace:

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y = 5 & 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 6 & 4x + 6y = 10 \end{array}$$

Žádné řešení (2. případ), jediné řešení (1. případ)
nekonečně mnoho řešení (3. případ)

Geometricky:

1. případ: různoběžky – jediný průsečík
2. případ: různé rovnoběžky
3. případ: splývající rovnoběžky

Možná zobecnění ?

Zobecnění :

Zobecnění:

Linearita – nebudeme dále rozvíjet

Zobecnění :

Linearita – nebudeme dále rozvíjet

Počet neznámých v soustavě (obecně n)

Zobecnění:

Linearita – nebudeme dále rozvíjet

Počet neznámých v soustavě (obecně n)

Počet rovnic soustavy (obecně m)

Zobecnění :

Linearita – nebudeme dále rozvíjet

Počet neznámých v soustavě (obecně n)

Počet rovnic soustavy

Metody řešení

Metody řešení:

Metody řešení:

Eliminační (vylučovací)

Metody řešení:

Eliminační (vylučovací)

Komparační (srovnávací) – jen speciální případ

Metody řešení:

Eliminační (vylučovací)

Komparační (srovnávací) – jen speciální případ

Cramerovo pravidlo – spíše teoretický význam

Náznak postupu :

$$\begin{array}{ll} ax + by = u & cax + bcy = cu \\ cx + dy = v & cax + ady = av \end{array}$$

$$(ad - bc)y = (av - cu), \quad (ad - bc)x = (du - bv)$$

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc}$$

Standardní označení :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

resp.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m$$

Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí typu $m \times n$** . Je-li $m = n$ mluvíme o **čtvercové matici řádu n** .

a_{ij} – **prvek** se nachází v i -tém řádku a v j -tém sloupci.

Označení:

$$A = \left(a_{ij} \right)_{i=1..n}^{j=1..m}$$

řádek, sloupec matice - **vektory**

- **Rovnost matic:** Jsou stejného typu a prvky se stejnými indexy se rovnají

- **Součet matic:** Necht' $A = \left(a_{ij} \right)_{i=1..n}^{j=1..m}$, $B = \left(b_{ij} \right)_{i=1..n}^{j=1..m}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Nulová matice**: Všechny její prvky jsou rovny 0
- **Opačná matice**: K A je to matice $(-1) A = -A$
- „Matice jako reálná čísla“: Matice stejného typu tvoří grupu

Lze matice mezi sebou násobit? Násobení číslem lehké:

Násobení matice A reálným číslem λ

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Součin matic :** Necht' $A = \left(a_{is} \right)_{i=1..n}^{s=1..m}$, $B = \left(b_{sj} \right)_{s=1..m}^{j=1..k}$

$$AB = C = \left(c_{ij} \right)_{i=1..n}^{j=1..k},$$

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1, & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0, & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4, & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1, & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0, & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4, & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix}$$

- Součin matic: Jaké má **vlastnosti**?
násobení **není komutativní**, je-li např. A typu 2×3 a B typu 3×4 , pak součin AB je definován, zatímco BA nikoliv.

Ani v případě dvou čtvercových matic stejného řádu obecně **neplatí** $AB = BA$.

- A, B, C čtvercové matice řádu n .
Platí $(AB)C = A(BC)$,
 $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nechť A je čtvercová matice řádu n .

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ tvoří tzv. **hlavní diagonálu**

Jednotková matice řádu n

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AI = IA = A$$

A čtvercové matice řádu n . Lze nalézt matici B řádu n tak, že $AB = BA = I$?

(a nenulové reálné číslo: $ab = ba = 1$, $b = a^{-1}$)

A čtvercové matice řádu n . Lze nalézt matici B řádu n tak, že $AB = BA = I$?

(a nenulové reálné číslo: $ab = ba = 1$, $b = a^{-1}$)

Obecně nikoliv

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A čtvercové matice řádu n . Lze nalézt matici B řádu n tak, že $AB = BA = I$?

(a nenulové reálné číslo: $ab = ba = 1$, $b = a^{-1}$)

Obecně nikoliv

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nechť A čtvercové matice řádu n . Řekneme, že A je **regulární** matice, pokud existuje čtvercová matice B řádu n taková, že $AB = BA = I$

Nechť A je regulární matice a nechť B je ta matice, pro kterou platí $AB = BA = I$. Matici B pak nazýváme **inverzní** maticí k matici A a značíme ji A^{-1} .

Existují nějaké regulární matice ? Ano, jednotková matice je regulární.

Jak zjistit, zda-li je matice regulární?

Jak určit inverzní matici ?

Mějme řádky matice (řádkové vektory):

$$\mathbf{a}^1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \mathbf{a}^k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}).$$

Lineární kombinací řádků rozumíme

$$\lambda_1 \mathbf{a}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}^k, \quad \lambda_i \in R$$

Triviální lineární kombinací řádků rozumíme

$$0 \mathbf{a}^1 + \dots + 0 \mathbf{a}^k$$

Řekneme, že vektory $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in R : \lambda_1 \mathbf{a}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}^k = (0, \dots, 0) \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Mezi všemi lineárními kombinacemi řádků je rovna nulovému vektoru jen triviální lineární kombinace

Hodnost matice ... maximální počet lineárně nezávislých řádků, ozn. $h(A)$

Nechť A je čtvercové matice řádu n . Matice je regulární, právě když $h(A) = n$.

Jak prakticky určovat hodnotu (a inverzní matici) ?

Jednoduše lze pro schodovité matice: Matice A typu $m \times n$ je schodovitá, jestliže pro každé $i \in 2, \dots, m$ platí, že i -tý řádek matice A je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i - 1)$ -ní řádek. Hodnota je pak zřejmě rovna počtu nenulových řádků.

Elementární řádkové úpravy:

- záměna dvou řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku

Lze ukázat, že pokud pomocí těchto úprav převedeme matici A na schodovitou matici B , pak

$$h(A) = h(B)$$

Elementární řádkové úpravy:

- záměna dvou řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku

Elementární úpravy lze použít i na hledání inverzní matice:

$$(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice A^T k matici A :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vlastnosti transponovaných matic

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Soustavy lineárních rovnic

Příklad: Mám k dispozici 110 příkladů na derivace, 105 na integrály a 185 příkladů z finanční matematiky. Chci dát testy, z nichž 1. test obsahuje jeden příklad na derivace a dva příklady na integrály, atd. Počty popisuje tabulka. Zajímá mne, kolik variant jednotlivých testů mohu sestavit tak, aby se každý příklad vyskytoval právě v jednom testu (a zda to vůbec půjde nějak zkombinovat). Podle následující tabulky sestavíme soustavu rovnic.

	T_1	T_2	T_3	počet příkladů
derivace	1	2	3	110
integrály	2	5	1	105
finanč.mat.	0	1	7	185

Kolik variant T_1, T_2, T_3 ?

Označíme počty: (x_1, x_2, x_3)

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 110$$

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 105$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = 185$$

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 110$$

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 105$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = 185$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 105 \\ 185 \end{pmatrix}$$

soustava lineárních rovnic obecně:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A je matice soustavy, x je vektor neznámých,
a b je vektor pravých stran

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$(A|b)$ je rozšířená matice soustavy

Soustava je řešitelná, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Soustava je řešitelná: má 1 řešení nebo nekonečně mnoho řešení

Je-li matice soustavy čtvercová matice (soustava má n rovnic o n neznámých), pak má soustava jediné řešení, právě když je matice soustavy regulární

Řešení: Gaussova eliminace (elementární úpravy jako inverzní matice)

Determinanty

Determinant je funkce, která každé čtvercové matici přiřadí číslo.

Označení: $\det A$ nebo $|A|$

Definice:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{pokud } n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} & \text{pokud } n > 1 \end{cases}$$

A_{ij} je matice, u které vynecháme i -tý řádek a j -tý sloupec. Její determinant se zpravidla nazývá **subdeterminant**. Ve vzorci se subdeterminantům navíc „přidělují znaménka“ podle schematu

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & & \end{pmatrix}$$

matice 2×2 : $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Pamatujeme si: součin prvků na diagonále zleva doprava bereme se znaménkem „+“, součin prvků na diagonále zprava doleva bereme se znaménkem „-“

matice 3×3 : Sarrusovo pravidlo

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Pomůcka:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

„třikrát součin prvků na diagonálách zleva doprava se znaménkem $+$ a třikrát součin prvků na diagonálách zprava doleva se znaménkem $-$; lze i s připsáním prvních dvou řádků pod původní matici“

Vyšší řády: nutno upravit

- A' z A vznikne záměnou dvou řádků mezi sebou
 $\det A' = -\det A$
- A' z A vznikne vynásobením jednoho řádku číslem λ
 $\det A' = \lambda \det A$
- A' z A vznikne přičtením násobku jednoho řádku k jinému řádku
 $\det A' = \det A$

Rozvoj determinantu podle j -tého sloupce

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

Rozvoj determinantu podle i -tého řádku

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

Vlastnosti:

- $\det A = \det A^T$
- $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- Je-li A horní (resp. dolní) trojúhelníková matice, pak platí
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$
- A je regulární, právě když $\det A \neq 0$.

Determinanty a inverzní matice:

$$A = \left(a_{ij} \right)_{i=1..n}^{j=1..n}, \quad A^{-1} = \left(b_{ij} \right)_{i=1..n}^{j=1..n},$$

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$$

Rozložíme-li do jednodušších kroků:

- vytvoříme matici ze stejnohlých subdeterminantů A_{ij}
- opatříme je „střídavými znaménky“
- takto vzniklou matici transponujeme
- každý prvek vzniklé matice dělíme determinan-tem matice původní

Determinant a řešení lineární rovnic:

Cramerovo pravidlo:

Nechť $Ax = b$ je soustava lineárních rovnic, kde A je regulární čtvercová matice řádu n . Označme A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením j -tého sloupce sloupcem b pravých stran rovnic dané soustavy. Pak pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

Podrobnější výklad a návod k řešení příkladů najdete na adrese:

<http://mathonline.fme.vutbr.cz/>

[Matrice-a-determinanty-inverzni-matrice/
sc-63-sr-1-a-33/default.aspx](http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matrice-a-determinanty-inverzni-matrice/sc-63-sr-1-a-33/default.aspx)

Přečtěte si nejprve výklad vystavený pod

STUDIJNÍ TEXT

a pak si projděte animace v

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY - PRESENTACE

Část

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

obsahuje příklady, ale bez výsledků.