Cvičení 101: Najděte primitivní funkce k funkcím

$$\sin x, \quad \cos^{-2} x, \quad \frac{x}{x^2+1}, \quad \operatorname{tg} x, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ !$$

Poznámka: Znak „$\overset{C}{=}$“ užíváme ke stručnému zápisu toho, že „na každém otevřeném intervalu I v definičním oboru se každá primitivní funkce dostane restrikcí nalezené funkce na I a přičtením vhodné konstantní funkce. Ve výsledcích je nutno uvádět vždy obor, pro který výsledek platí, i když je u následujících výsledků příkladů vynecháván!

Cvičení 102: Určete primitivní funkci F k funkci f (licence: na každém maximálním otevřeném intervalu v D_f) pro následující f :

$$\frac{x^3}{x}\,, \quad \frac{1}{1-x^2}\,, \quad \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,. \quad \left[F(x) \overset{C}{=} \frac{x^4}{3x}, \text{ resp. } \log\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}, \text{ resp. } -2\operatorname{cotg} 2x \right]$$

Charakterizujte všechny takové funkce F !

Cvičení 103: Určete primitivní funkce k funkcím

$$x\sin x\,, \quad x^n \exp x\,, \quad e^x \sin x\,.$$
$$\left[-x\cos x + \sin x\,, \quad I_n = x^n e^x - nI_{n-1}\,, \quad \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} \right]$$

Cvičení 104: Určete:

$$\int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x\ .$$
$$\left[\frac{(\log x)^2}{2}\,, \quad \frac{x(\sin(\log x) - \cos(\log x))}{2}\,, \quad x\operatorname{arctg} x - \frac{\log(x^2+1)}{2} \right]$$

Cvičení 105: Určete: V závislosti na parametrech a, b z $\mathbb{R}$ vypočtěte:

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\ . \qquad \left[\frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} \right]$$

Cvičení 106: Určete:

$$\int \frac{\log^n x}{x}\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}\,, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\exp x}{\exp x + 1}\,\mathrm{d}x\,.$$
$$\left[\frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}\,, \quad \log(x^2+x+1)\,, \quad \log\left(e^x+1\right) \right]$$

Cvičení 107: Nalezněte primitivní funkce k funkcím

$$\sin\,,\quad \cosh\,,\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,,\quad \frac{x+2}{2x^2+8x+8}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}\,!$$

U poslední funkce nezapomeňte určit, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí nalezený vztah!

Cvičení 108: Pomocí substituční metody vypočtěte ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x\,,\quad \int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \cos^n x \sin x\,\mathrm{d}x\,!$$

Cvičení 109: Určete

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x\,,\quad \int \frac{x^3}{x^8-2}\,\mathrm{d}x \quad \int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}\,\mathrm{d}x\,!$$

$$\left[(1-3x)\sqrt[3]{1-3x}/4\,,\quad \overset{C}{=} \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\log(\sqrt{2}\cosh x+\sqrt{\cosh 2x})\right]$$

Cvičení 110: Určete alespoň jednu primitivní funkci k funkci $\sin^4 x$!

$$[3x/8-(\sin 2x)/4+(\sin 4x)/32]$$

Cvičení 111: Dokažte, že funkce $3x/8-(\sin 2x)/4+(\sin 4x)/32$ je primitivní funkcí $\sin^4 x$! Srovnejte s předcházejícím cvičením!

Cvičení 112: Ukažte, že existují konstanty A, B tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{3x+5}{2x^2+3x+7} = \frac{A(4x+3)}{2x^2+3x+7} + \frac{B}{2x^2+3x+7}.$$

Úvahu zobecněte; proč je takový rozklad potřebný ?

Cvičení 113: Určete alespoň jednu primitivní funkci k funkcím

$$\frac{x^{17}-5}{x-1},\quad \frac{x^{17}-5}{x^2-1},\quad \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$$

$$\left[\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}-4\log|x-1|,\ \ldots\ ,x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|\right]$$

Cvičení 114: Vypočtěte

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}. \qquad \left[x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C\right]$$

Cvičení 115: Určete alespoň jednu primitivní funkci k funkci (zde lze rozklad ještě uhodnout)

$$\frac{x}{x^3-3x+2}. \qquad \left[\frac{1}{3(1-x)}+\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$$

Cvičení 116: Dokažte, že platí

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \quad x\neq 1\ .$$

Cvičení 117: $(*)$ Určete alespoň jednu primitivní funkci k funkci

$$\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}\ , \qquad \left[\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\log\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|=\right.$$

$$\left.=\frac{1}{8}\log|x+1|+\frac{1}{x+2}+2\log|x+2|+\frac{1}{4(x+3)^2}+\frac{5}{4(x+3)}-\frac{17}{8}\log|x+3|\right]$$

Cvičení 118: $(*)$ Vyzkoušejte si techniku „lepení“ na jednoduchých příkladech; určete (aspoň jednu) primitivní funkci ke každé z následujících funkcí f:

$$|x|, \quad \max\{x,x^2\}\,!$$

$[F(x)=\dfrac{x^2\operatorname{sgn}x}{2}\,, \quad F(x)=x^3/3$ pro $x\in(-\infty,0)$, $x^2/2$ pro $x\in[0,1]$, $x^3/3+1/6$ pro $x\in(1,\infty)$. $]$

V následujících příkladech se procvičuje integrace racionálních funkcí; aditivní konstanty ve výsledcích jsou vynechávány:

Cvičení 119: Vypočtěte (uvádíme vždy jen jednu primitivní funkci):

$$\int\frac{x\ \mathrm{d}x}{2x^2-3x-2}\ , \quad \int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}\ \mathrm{d}x\ , \quad \int\frac{x^2\ \mathrm{d}x}{(x+2)^2(x+4)^2}\ .$$

$$\left[\ \frac{1}{5}\log\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right],\ x+\frac{1}{x}+\log\frac{(x-1)^2}{|x|}\ ,\ 2\log\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}\ \right]$$

Cvičení 120: Vypočtěte : $(*)$

$$\int\frac{(5x^2-12)\ \mathrm{d}x}{(x^2-6x+13)^2}\,,\ \int\frac{(x^2-1)^2\ \mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^3}\,,\ \int\frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\sin^3x-\cos^3x}\,,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}$$

Tyto příklady nevycházejí „hezky“, nedejte se tím znervóznit.

Hodně příkladů na jednoduché integrály můžete opět nalézt v učebnici:
Černý, I. : Úvod do inteligentního kalkulu. 1000 příkladů z elementární matematiky, Academia, Praha 2002.