

Cvičení 81: Najděte funkci definovanou na $\mathbb{R}$, jejíž derivace f' existuje na $\mathbb{R}$ a není omezená! Najděte funkci definovanou na $(0, 1)$, jejíž derivace f' existuje na $(0, 1)$ a není omezená na $(0, 1)$!

Cvičení 82: Ukažte na základě platnosti prvního vzorce i druhý vzorec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Cvičení 83: Ukažte, že pro hyperbolické funkce platí „podobné“ vzorečky (zmíněná podobnost usnadňuje jejich zapamatování)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1.$$

Cvičení 84: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} !$$

Cvičení 85: Vypočtěte (pomocí derivování levé strany rovnosti)

$$\arcsin x + \arccos x = \dots$$

Cvičení 86: Lze funkci

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \dots$$

rozšířit spojitě na $\mathbb{R}$?

Cvičení 87: Vyšetřete průběh polynomiálních funkcí

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x^4 !$$

Cvičení 88: Vyšetřete průběh racionálních funkcí

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, \quad g(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

$$h(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} !$$

Cvičení 89: (*) Postup při určování průběhu funkce není „univerzální“ – vyšetřete průběh funkcí

$$f(x) = |x+4| - |x-2|, \quad g(x) = |x^2+x-2| - |x^2+2x-3|,$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x-x^{-1}}$$

Cvičení 90: Popište funkce $f * f$ a $f * f * f$ pro $f(x) = x$ (f je tedy Id).

Cvičení 91: Identické zobrazení Id množiny $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ (proč?). Jsou rostoucími funkcemi i zobrazení $\text{Id} * \text{Id}$, $\text{Id} * \text{Id} * \text{Id}$, atd. ?

Cvičení 92: Je-li f identické zobrazení Id , jsou rostoucími funkcemi na $\mathbb{R}$ i f , $f \cdot f$, $f \cdot f \cdot f$, ... ?

Cvičení 93: Jsou-li f, g „stejně monotonní“ (např. obě rostoucí, nebo obě klesající) na $\mathbb{R}$, je i $f + g$ „stejně monotonní“ na $\mathbb{R}$?

Cvičení 94: Vyšetřete průběh funkcí

$$f(x) = \arctg x^2, \quad g(x) = \arctg \frac{1}{x^2} !$$

Cvičení 95: Najděte všechny inflexní body funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} !$$

Cvičení 96: Který obdélník o daném obvodu $d > 0$ má největší obsah ?

Cvičení 97: (*) Jaký je vztah mezi $\log x$ a $\log_a x$? Rozmyslete si, jak spočítat $\log 10$, $\log_{0.5} 10$, apod.

Cvičení 98: Průběh některých funkcí se alespoň přibližně dá určit „odhadem“. Zkuste to s funkcemi

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \text{resp.} \quad g(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} !$$

Cvičení 99: Rozmyslete si, jak bude vypadat graf funkce $f(x) = \arctg(\tg x) !$

Cvičení 100: (*) „Hezký průběh“ má funkce

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1},$$

téměř vše však o ní můžeme zjistit elementárně, jen se znalostí zavedených pojmů a početního aparátu ze střední školy. Pokuste se o to !

Hodně příkladů na vyšetřování průběhu funkcí včetně náčrtků jejich grafů můžete nalézt v učebnici: Černý, I.: Úvod do inteligentního kalkulu. 1000 příkladů z elementární matematiky, Academia, Praha 2002.