

Cvičení 61: Za pomoci „definiční limity“ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a analogických limit pro exponenciálu a logaritmus zkuste spočítat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \quad \left[\frac{5}{3} \right], \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\exp(3x) - 1)}{\sin^2(2x) \cos(x) \log(5x + 1)} \quad \left[\frac{3}{20} \right]!$$

Cvičení 62: Zderivujte funkce, popsané předpisy

$$\exp(x) \log(x), \quad \sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x, \quad \log(\sin x), \quad \log(\log(\sin x))!$$

Některé závorky v tisku i při psaní vynecháváme. Věnujte nácviku derivování patřičnou péči a čas, bez spolehlivého zvládnutí této látky se prakticky nedá zkouška zvládnout.

Cvičení 63: Zderivujte funkce

$$\log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \log(x + \sqrt{x^2 - 1})!$$

Výsledek si dobře zapamatujte, budeme ho později potřebovat.

Cvičení 64: Zderivujte funkce

$$\exp(x^2), \quad \exp^3(1/x^2), \quad \exp^2[(1 - x^2)^3].$$

Cvičení 65: Dokažte, že funkce $y(x) = x^2 \log x$ je řešením diferenciální rovnice

$$xy''' = 2, \quad x \in (0, \infty).$$

Cvičení 66: Pozor na fakt, že funkce nemůže mít derivaci mimo svůj definiční obor! Ve kterém z předchozích cvičení hraje toto upozornění závažnou roli?

Cvičení 67: Spočtete $(f \cdot g)', (f \cdot g)'', (f \cdot g)''', \dots$ a odhadněte, jak bude vypadat vzorec pro výpočet $(f \cdot g)^{(n)}$!

Cvičení 68: Je-li f inverzní funkce k funkci g na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, g zobrazuje interval I na interval J a je rostoucí na I , ukažte, že f je rostoucí na J !

Cvičení 69: Je-li za situace z předchozího cvičení g spojitá na I , je $f = g^{-1}$ spojitá na J . Má-li navíc g vlastní nenulovou derivaci v bodě $a \in I$, má f derivaci v bodě $g(a)$. Jestliže toto víme, není obtížné tuto derivaci inverzní funkce spočítat. Jaký vzorec je k tomu vhodný?

Cvičení 70: Zavedené funkce $\exp$ a $\log$ nám umožní definovat obecnou mocninu a obecnou exponenciálu pomocí vztahu

$$a^b = \exp(b \log a)$$

Zřejmě tedy pro „základ“, tj. číslo a , musí platit $a > 0$. Odvoďte vzorce pro derivování obecné mocniny x^a a obecné exponenciály a^x !

Cvičení 71: Načrtněte grafy funkcí z předchozího cvičení pro různá a !

Cvičení 72: Vyšetřete průběh polynomiálních funkcí

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x^4 !$$

Cvičení 73: Vyšetřete průběh racionálních funkcí

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, \quad g(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

$$h(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

a zkuste je rozložit na parciální zlomky!

Cvičení 74: Ukažte, že množina

$$K(0, 1) := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

je konvexní!

Cvičení 75: Ukažte, že množina

$$M := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$$

je konvexní!

Cvičení 76: Ukažte, že funkce $f(x) = x^2$ je konvexní!

Cvičení 77: Jaké jsou maximální intervaly monotonie funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cosh x$?

Cvičení 78: Určete všechny intervaly, na kterých jsou funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\cosh x$ konvexní, resp. konkávní!

Cvičení 79: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x-1| + |x+1| !$$

Cvičení 80: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |(x-1)^2 - 1| !$$