

Cvičení 33: (*) V návaznosti na předchozí cvičení řešte ještě úlohu:
Nechť $f(x) = (1 - x)^{-1}$. S obvyklou konvencí o definičním oboru určete funkce $f * f$ a $f * f * f$!

Cvičení 34: Nechť $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazení, $A \subset X$, $B \subset Y$. Zjistěte, jaký je vztah mezi množinami

$$f(f^{-1}(B)) \text{ a } B, \text{ resp. } f^{-1}(f(A)) \text{ a } A!$$

Cvičení 35: Identické zobrazení Id množiny $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ (proč?). Jsou rostoucími funkcemi i zobrazení $Id * Id$, $Id * Id * Id$, atd.?

Cvičení 36: Je-li $f(x) = x$, jsou rostoucími funkcemi na $\mathbb{R}$ i $f, f \cdot f, f \cdot f \cdot f, \dots$?

Cvičení 37: Jsou-li f, g „stejně monotonní“ (např. obě rostoucí, nebo obě klesající) na $\mathbb{R}$, je i $f + g$ „stejně monotonní“ na $\mathbb{R}$?

Cvičení 38: Jsou-li f, g rostoucí funkce na (a, b) , je i $f \cdot g$ rostoucí funkce na (a, b) ?

Cvičení 39: (*) Jsou-li f, g rostoucí kladné funkce na (a, b) , je i $f \cdot g$ rostoucí funkce na (a, b) ?

Cvičení 40: Ze střední školy znáte periodické funkce $\sin, \cos$. Znáte ještě nějaké jiné?

Cvičení 41: Může existovat funkce, pro kterou je každé kladné číslo její periodou?

Cvičení 42: Definovali jsme si Dirichletovu a Riemannovu funkci, jejichž grafy vypadají „dosti divoce“. Jsou tyto funkce periodické?

Cvičení 43: Může existovat prostá periodická funkce?

Cvičení 44: Rozšiřte periodicky (tak, aby toto rozšíření bylo periodickou funkcí) funkci $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření!

Cvičení 45: Rozšiřte periodicky s periodou $p = 2$ funkci $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření!

Cvičení 46: V čem je podstatný rozdíl mezi oběma předchozími úlohami?

Cvičení 47: Rozšiřte periodicky s periodou $p = 1$ funkci $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření! Proč je v tomto zadání interval $[0, 1]$ a ne interval $[-1, 1]$?

Cvičení 48: Rozšiřte periodicky funkci $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření!

Cvičení 49: Rozšiřte periodicky s periodou $p = 2$ funkci $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření!

Cvičení 50: Rozšiřte periodicky s periodou $p = 2$ funkci $f(x) = 1 - |x|$, $x \in [-1, 1]$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření!

Cvičení 51: Rozšiřte periodicky s periodou $p = 1$ funkci $f(x) = x$, $x \in [0, 1)$, na $\mathbb{R}$ a načrtněte graf tohoto rozšíření!

S funkcemi, konstruovanými v posledních několika cvičeních, se můžete snadno setkat v technické praxi.

Cvičení 52: Určete jakkoli $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)!$ Lze vystačit pouze s definicí limity?

Cvičení 53: Určete jakkoli $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)!$ Lze ještě vystačit pouze s definicí limity?

Cvičení 54: Určete $\lim_{x \rightarrow 2} 1/(x^2 - 3)!$ Co k tomu stačí a proč?

Cvičení 55: Zkoumejte existenci a hodnotu limit

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} [-1], \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} [-2], \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)^2} [\text{neex.}]!$$

Cvičení 56: (*) Dá se ukázat, že pokud je nekonstantní periodická funkce definovaná na $\mathbb{R}$ spojitá alespoň v jednom bodě, má nejmenší kladnou periodu (přijměte jako fakt). V této souvislosti je zajímavá otázka, zda je Riemannova funkce spojitá alespoň v jednom bodě z $\mathbb{R}$. [ano, dokonce v mnoha bodech]

Cvičení 57: Vypočtěte hodnoty následujících limit (každý případ se pokuste zobecnit a najít potřebné metody výpočtu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} [1], \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \left[\frac{2}{3} \right], \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \left[\frac{1}{2} \right].$$

Určete limity následujících funkcí ve všech bodech mimo definiční obor a v bodech $+\infty$ a $-\infty$:

$$\frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 1}, \quad \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 1}.$$

Cvičení 58: Zjistěte zda lze funkce z intervalu $(0, 1)$ rozšířit „spojitě“ na $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{1 - x^2}, \quad 1/\sqrt{1 - x^2}.$$

Cvičení 59: (*) Sestrojte funkci (ne)spojitou v bodě 0! Sestrojte funkci (ne)spojitou právě v bodě 0!

Cvičení 60: (*) Sestrojte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (ne)spojitou právě v bodech množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$.

V cvičeních na limity se často používají vztahy, se kterými jsme se již setkali (jak souvisejí poslední dva?):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1.$$

My se však již látce o limitách přestaneme věnovat systematicky a jen občas se k ní vrátíme.