

Zopakujte si pojmy probrané na přednášce a zkuste si rozmyslit několik následujících příkladů. Cvičení vám eventuálně ukáží cestu, jak na to jít (výsledky neuvádím, aby vás to nutilo přemýšlet).

Cvičení 16: Jsou pro libovolné výroky a, b, c ekvivalentní výroky

$$a \Rightarrow b, \quad a \wedge \text{non } b, \quad \text{non } a \vee b?$$

Cvičení 17: Rozhodněte, zda jsou následující výroky pravdivé:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y < 2), \quad (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})(x + y - z = 0).$$

Zkoumejte pravdivost výroků, které vzniknou z předcházejících záměnou obecných za existenční kvantifikátory a naopak, případně záměnou jejich pořadí.

Cvičení 18: Je-li $A = (1, 4)$, $B = (2, 7)$, jakými intervaly jsou množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$?

Cvičení 19: Je-li funkce f definována na $\mathbb{R}$, co lze říci o vzájemné poloze grafů funkcí f , $-f$, $f(-x)$ s $x \in \mathbb{R}$, $f(x \pm a)$ s $x \in \mathbb{R}$, $|f|$?

Cvičení 20: Funkci lze také popsat „slovně“. Zkuste vymyslet nějaké příklady tohoto popisu.

Cvičení 21: Všimněte si, že popis přiřazení „předpisem“ může být na částech definičního oboru odlišný, jako je tomu u funkce $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Popište pomocí lineárních funkcí a vhodných intervalů funkci

$$f(x) = ||x| - 3|.$$

Je tato funkce sudá nebo lichá?

Cvičení 22: Má součin polynomů vyšší stupeň než mají polynomy, které násobíme? Rozeberte všechny možné případy!

Cvičení 23: Dělte polynomy

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 3), \quad (x^3 - 1) : (x^2 - 5)!$$

Cvičení 24: Určete body, ve kterých nabývá funkce

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

hodnoty 0! Popište všechny nekonstantní polynomy, jimiž lze polynom p dělit tak, že výsledkem je opět polynom.

Pro řešení následujících úloh vám cvičící ukáží, jak se racionální funkce dají vyjadřovat pomocí jednodušších racionálních funkcí (tzv. rozklad na parciální zlomky).

Cvičení 25: Ukažte, že pro vhodnou volbu $A, B, C \in \mathbb{R}$ je splněna rovnost

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

$$[A = 1/6, B = -9/2, C = 28/3]$$

Cvičení 26: Ukažte, že pro vhodnou volbu $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ je splněna rovnost

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 + \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

[$A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$, $D = -16/3$]

Později se naučíte pracovat s touto metodou ve vší obecnosti, tyto příklady jste zvládli snadno, protože „dobře vycházely“.

Cvičení 27: Zjistěte, zda funkce

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

nabývá pro nějaký bod $x \in \mathbb{R}$ hodnoty $f(x) = 0$! Nabývá v nějakém bodě hodnoty 2? Je tato funkce lichá?

Cvičení 28: Nabývá funkce g z předcházejícího příkladu hodnoty 1? Je „vidět“, že nabývá hodnoty -1 ?

Cvičení 29: Pro funkci g z předchozího příkladu určete obor hodnot H_g !

Cvičení 30: Kolik prvků má množina $f^{-1}(x) = f^{-1}(\{x\})$ pro $x \in \mathbb{R}$?

[Maximálně dva prvky, ale může mít žádný, jeden nebo dva prvky.]

Cvičení 31: V kolika bodech nabývají funkce $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$ hodnoty 1? Zkoumejte podobnou otázku místo pro číslo 1 obecněji pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Načrtněte grafy funkcí f, g, h a sestrojte k nim křivky symetrické podle osy 1. a 3. kvadrantu (přímka o rovnici $y = x$). Jsou vzniklé křivky grafy nějakých funkcí? [Některé ano, některé ne. Proč?]

Cvičení 32: Zkuste provést následující experiment: do funkce $f(x) = 1/(x + 1)$ „dosadte“ za x tutéž funkci f a zkoumejte, kde je vzniklá funkce definována ve smyslu naší úmluvy o definičním oboru. (Experiment nám poslouží jako výchozí bod pro látku o skládání zobrazení a funkcí – vytváříme tak tzv. složenou funkci, kterou budeme značit $f \circ f$.)

Tuto operaci ještě jednou zopakujte a opět zkoumejte definiční obor vzniklého zobrazení.

[Pro znázornění použijte obrázek se třemi rovnoběžnými přímkami, pomocí nichž znázorníte D_f , $D_{f \circ f}$ a $D_{(f \circ f) \circ f}$ a „přiřazení“ modelujte šipkami.]