

Příklady k látce z lineární algebry

Řešte následující úlohy (typové úlohy na soustavy rovnic). Využívejte aparát maticového počtu – u rovnic s nenulovým vektorem pravých stran spočtete hodnotu matice soustavy a rozšířené matice soustavy.

Cvičení 1: Řešte soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y & = & 0 \\ 3x + y & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4x - 6y & = & 0 \\ -6x + 9y & = & 0 \end{array}$$

$$[x = y = 0; \quad x = 3t, y = 2t, t \in \mathbb{R}]$$

Cvičení 2: Řešte soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 2x & + & 3z = 0 \\ -2y - z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 0 \\ x + 3y - z & = & 0 \\ x + 4y - z & = & 0 \end{array}$$

$$[x = 3t, y = t, z = -2t, t \in \mathbb{R}; \quad x = y = z = 0]$$

Cvičení 3: Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4u + 5v & = & 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5u + v & = & 0 \\ 3x + 4y + 5z + u + 2v & = & 0 \\ x + 3y + 5z + 12u + 9v & = & 0 \\ 4x + 5y + 6z - 3u + 3v & = & 0 \end{array}$$

$$[x = r + 15s, y = -2r - 12s, z = r, u = s, v = s, r, s \in \mathbb{R}]$$

Cvičení 4: Řešte soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y & = & 8 \\ 3x + y & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4x - 6y & = & 2 \\ -6x + 9y & = & -3 \end{array}$$

$$[x = -1, y = 2; \quad x = 2 + 3t, y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}; \text{ srovnejte s řešením Cv. 1}]$$

Cvičení 5: Řešte soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ 2x & + & 3z = 0 \\ -2y - z & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 1 \\ x + 4y - 2z & = & 3 \\ x + 3y - z & = & 2 \end{array}$$

$$[\text{soustava nemá řešení}; \quad x = -1 - 2t, y = 1 + t, z = t]$$

Cvičení 6: Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z - u + v & = & -1 \\ x + 3y + 5z - 4u & = & 1 \\ x - 4y + z + u - v & = & 3 \\ x + 3y + 2z - 2u + v & = & -1 \\ x - 2y + z - u - v & = & 3 \end{array}$$

$$[x = t, y = -1 + t, z = 0, u = -1 + t, v = -2t, t \in \mathbb{R}]$$

Cvičení 7: Spočtěte (libovolným způsobem) hodnoty determinantů:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}.$$

[10; -2; 1]

Cvičení 8: Spočtěte (libovolným způsobem) hodnoty determinantů

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

[-42; 54]

Cvičení 9: Spočtěte hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

[-28]

Cvičení 10: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}!$$

Co z výsledku vyplývá pro vztah obou matic?

Cvičení 11: Určete inverzní matice k maticím, jejichž determinanty jste počítali ve Cv. 8!

Podrobněji sepsaný výklad probrané látky a další úlohy (některé s animovaným řešením) najdete na internetové adrese

<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx>

Pro zopakování středoškolské látky se pokuste řešit následující úlohy:

Cvičení 12: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

$$\left| \frac{x-1}{2x-3} \right| \geq -2, \quad 1 \leq |x^2 - 2x - 2| < 2 \quad \frac{|x^2 - x - 6|}{x^2 - 5x + 6} < \frac{1}{2}.$$

Cvičení 13: Pro všechna reálná čísla x, y platí tzv. trojúhelníková nerovnost, kterou budeme používat

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

Cvičení 14: Ukažte, že platí identita

$$\left(\frac{x+|x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2} \right)^2 = x^2 !$$

Cvičení 15: Je-li funkce f definována na $\mathbb{R}$, co lze říci o vzájemné poloze grafů funkcí f , $-f$, $f(-x)$ s $x \in \mathbb{R}$, $f(x \pm a)$ s $x \in \mathbb{R}$, $|f|$?