Shrnutí základních vět z teorie Fourierových řad

Věta 1. *Nechť* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ *a řada konverguje stejnoměrně na* $[0, 2\pi]$. *Pak platí*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

Pro funkci $f \in L_1(0, 2\pi)$ definujeme *Fourierovy koeficienty* pomocí vzorců (1). *Fourierovou řadou* funkce f pak nazýváme formální řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Částečné součty Fourierovy řady funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$ označíme

$$s_n^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Věta 2 (O jednoznačnosti). *Nechť* $f \in L_1(0, 2\pi)$ *a příslušné Fourierovy koeficienty jsou všechny nulové. Potom* $f = 0$ *skoro všude na* $[0, 2\pi]$. *Speciálně, je-li* f *navíc spojitá na* $[0, 2\pi]$, *je* $f = 0$ *na* $[0, 2\pi]$.

Řekneme, že funkce f je po částech C^1 na intervalu $[a, b]$, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ a dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ tak, že $f \in C^1(x_i, x_{i+1})$ a existují vlastní limity $\lim_{x \to x_i+} f(x)$, $\lim_{x \to x_{i+1}-} f(x)$, $\lim_{x \to x_i+} f'(x)$ a $\lim_{x \to x_{i+1}-} f'(x)$ pro všechna $i = 0, \dots, n-1$. Označíme $f(x+) = \lim_{t \to x+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t \to x-} f(t)$.

Věta 3. *Nechť* f *je* 2π*-periodická funkce, po částech* C^1 *na* $[0, 2\pi]$. *Potom* $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$. *Speciálně, je-li* f *spojitá v* x, *je* $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = f(x)$. *Navíc je-li* f *spojitá v* (a, b), *platí, že* $s_n^f \underset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na* (a, b). *Speciálně, je-li* f *spojitá na* $\mathbb{R}$, *je* $s_n^f \rightrightarrows f$ *na* $\mathbb{R}$.

Věta 4 (Dini). *Nechť* f *je* 2π*-periodická,* $f \in L_1(0, 2\pi)$ *a* $x \in \mathbb{R}$. *Nechť dále existuje* $\delta > 0$ *a* $A \in \mathbb{R}$ *tak, že Lebesgueův integrál*

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2A}{t} \, dt \quad \textit{konverguje.}$$

Potom $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = A$.

Poznámka: Existují-li vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, je zřejmé, že v předchozí větě je jediným rozumným kandidátem pro A volba $A = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.

Důsledek 5 (Lipschitzovo kritérium). *Nechť* f *je* 2π*-periodická,* $f \in L_1(0, 2\pi)$ *a* $x \in \mathbb{R}$. *Nechť dále existují* $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ *a* $C > 0$ *tak, že*

$$|f(x) - f(y)| \le C \, |x - y|^{\alpha}, \quad \textit{pokud } |x - y| < \varepsilon.$$

Potom $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = f(x)$.

Důsledek 6. *Nechť* f *je* 2π*-periodická,* $f \in L_1(0, 2\pi)$ *a* $x \in \mathbb{R}$. *Nechť dále existují vlastní limity* $f(x+)$ *a* $f(x-)$ *a také vlastní limity*

$$\lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x+)}{t - x} \quad a \quad \lim_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}.$$

Potom $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. *Speciálně, pokud* f *má konečné jednostranné derivace v bodě* x, *pak* $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = f(x)$.

Věta 7 (Jordan-Dirichletovo kritérium). *Nechť* f *je* 2π*-periodická,* $f \in L_1(0, 2\pi)$ *a* f *má konečnou variaci v intervalu* $[a, b]$. *Potom v každém bodě* $x \in (a, b)$ *je* $\lim_{n \to \infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. *Je-li navíc* f *spojitá v* (a, b), *platí* $s_n^f \underset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na* (a, b).

Položme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{s_0^f(x) + \dots + s_n^f(x)}{n+1}.$$

Věta 8 (Fejér)**.** *Nechť f je 2π-periodická, $f \in L_1(0, 2\pi)$ a $x \in \mathbb{R}$. Nechť dále existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$.* Potom $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. *Je-li navíc f spojitá v $[a, b]$ a dále v bodě a spojitá zleva a v bodě b spojitá zprava, platí $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.*

Důsledek 9. *Nechť f je 2π-periodická, spojitá na $\mathbb{R}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje trigonometrický polynom T takový, že $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

Abstraktní teorie Fourierových řad v Hilbertových prostorech nám pomůže odvodit následující věty:

Věta 10 (Carleson)**.** *Nechť $f \in L_2(0, 2\pi)$. Potom $s_n^f \to f$ skoro všude na $(0, 2\pi)$.*

Věta 11. *Nechť f je 2π-periodická, $f \in L_2(0, 2\pi)$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| f - s_n^f \right\|_{L_2} = 0$. Dále platí Parsevalova rovnost*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Navíc v $L_2(0, 2\pi)$ je s_n^f nejlepší aproximací funkce f v prostoru všech trigonometrických polynomů stupně nejvýše n.

Věta 12 (Riesz-Fischer)**.** *Nechť $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ jsou reálná čísla, pro která $\sum(a_k^2 + b_k^2) < \infty$. Pak existuje 2π-periodická funkce $f \in L_1(0, 2\pi)$, jejíž Fourierovy koeficienty jsou tato čísla. Tato funkce je určena jednoznačně až na množinu míry 0 a navíc $f \in L_2(0, 2\pi)$.*