

1. Necht' $a \in \mathbb{R}$. Pak $-|a| \leq a \leq |a|$.
2. Necht' $x, c \in \mathbb{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x| < c$, právě když $(x < c) \ \& \ (x > -c)$ (zkráceně $-c < x < c$), neboli právě když $(x < c) \ \& \ (-x < c)$.
3. Necht' $x, c \in \mathbb{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x| > c$, právě když $(x > c) \vee (x < -c)$.
4. Necht' $x, y, c \in \mathbb{R}$, přičemž $c > 0$. Pak $|x - y| < c$, právě když $x \in (y - c, y + c)$.
5. Vyjádřete analogicky vztahy $|x - y| \leq c$, $|x - y| > c$, $|x - y| \geq c$.
6. Vyjádřete jednoduše množinu $\{x \in \mathbb{R}; |||x| - 1| - 2| - 3| < 1\}$.
7. Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b|, \\ |a - b| &\leq |a| + |b|, \\ ||a| - |b|| &\leq |a - b|, \\ ||a| - |b|| &\leq |a + b|. \end{aligned}$$

DŮKAZY METODOU MATEMATICKÉ INDUKCE

8. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
9. Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ platí $n^2 \leq 2^n$.
10. Necht' $n, k \in \mathbb{N}$. Pak existují $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $r < k$ a $n = qk + r$. (Dělení se zbytkem)
11. Necht' $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n$ jsou nezáporná čísla. Pak platí

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává jen v případě, že jsou všechna čísla $a_1, \dots, a_n$ stejná. (Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, AG nerovnost)

VÝROKY, VÝROKOVÉ SPOJKY, KVANTIFIKÁTORY A JEJICH POUŽITÍ

12. Vyjádřete jednoduše množinu $\{a \in \mathbb{R}; (\forall x \in \mathbb{R})(|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$.
13. Uvažme následující výroky:
 - (i) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
 - (ii) $(\exists y \in M)(\forall x \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
 - (iii) $(\exists y \in M)(\exists z \in M)(\forall x \in M)(x = y + z)$
 Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je-li
 a) $M = \mathbb{N}$, b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$, c) $M = (0, 1)$, d) $M = \{0\}$?

14. Jsou pravdivé následující výroky?

- $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
- $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
- $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$

Napište negace těchto výroků.

15. Vyjádřete co nejjednodušeji vztah mezi čísly $a, b \in \mathbb{R}$ určený formulí:

- $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < c)$,
- $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(a - x < c \Rightarrow |b - x| < c)$,
- $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|a - x| < c \Rightarrow b - x < c)$,
- $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(a - x < c \Rightarrow b - x < c)$,
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists u > 0)(\forall c \in (0, u))(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < u)$.

INFIMUM A SUPREMUM

16. Necht' $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Předpokládejme, že má nejmenší prvek (tj. minimum, značíme $\min A$). Ukažte, že $\inf A = \min A$. Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro největší prvek (tj. maximum, $\max A$).

17. Nalezněte suprema a infima (případně maxima a minima) následujících množin (pokud existují):

- $A = \{0, 1\}$, b) $B = \{1, -5, 7, -3, 50\}$, c) $C = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0\}$, d) $D = (-1, 0) \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$,
- e) $E = (1, 2) \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, f) $F = \{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, g) $G = \{(-1)^n \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$, h) $H = \{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$.

18. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Označme $s = \inf A$, $S = \sup A$, $t = \inf B$, $T = \sup B$.

- (a) Vyjádřete $\inf(A \cup B)$ a $\sup(A \cup B)$ pomocí hodnot s, S, t, T .
- (b) Lze něco říci o $\inf(A \cap B)$ a $\sup(A \cap B)$? (Uvažte případ, kdy $A = (-1, 1)$ a $B = \{-1, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$.)

19. Spočítejte následující limity posloupností:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}, \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^5}}{7 - \frac{3}{n^2}}, \quad \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+7}{5n+3}, \quad \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+7)}{n^2+5n+15}, \\
 & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{1}{n}}, \quad \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \text{ kde } a_n \geq 0 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, \\
 & \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+15} - \sqrt{n+1}), \quad \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3}), \quad \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt{n^2+1}}, \\
 & \text{(j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}, \quad \text{(k)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, \text{ } a \in (0, +\infty), \quad \text{(l)} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n, \text{ } q \in \mathbb{R}, \\
 & \text{(m)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \quad \text{(n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}.
 \end{aligned}$$

20. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

21. Pomocí uvedeného tvrzení spočítejte limity:

$$\text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2^n + 17^n}{n! + n + 3^n}.$$

22. Pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti spočítejte limity:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \text{ pro } q \in (0, 1), \\
 & \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ kde } a_1 = 0 \text{ a } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{k} \text{ (kde } k > 1 \text{ je parametr)}, \\
 & \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ kde } a_1 = 0 \text{ a } a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}.
 \end{aligned}$$

23. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel, $a \geq 0$ a $p \in \mathbb{N}$. Pak platí:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n^p \rightarrow a^p \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}. \\
 & \text{(b)} a_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a_n^p \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

24. Některé příklady ze zkouškových písemek z minulých let:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^{100} - (4 - \frac{3}{n})^{50}}{(8 - \frac{1}{n})^{34} - (4 + \frac{1}{n})^{51}}, \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt[3]{n^3+1}] + [\sqrt[3]{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}}, \quad \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[4]{n^4+4n^3-n}], \\
 & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2 n} - \sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}, \quad \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt[n]{n^{100}+n^{99}-1} - \sqrt[n]{n^{100}+2n^{99}+1}}.
 \end{aligned}$$

LIMITA FUNKCE

25. Spočítejte následující limity:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}, \quad \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}, \quad \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{1+x^2} + x), \\
 & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2+1}}{x}, \quad \text{(f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2+1}}{x}, \quad \text{(g)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2}{2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2}, \\
 & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad \text{(j)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} x, \quad \text{(k)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)} \cdot x^k, \text{ } k \in \mathbb{Z}, \\
 & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^2)}{x^3-1}, \quad \text{(m)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \log \frac{x^2+1}{x^2+5}, \quad \text{(n)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3+15)}{\log(x^{15}+3)}, \quad \text{(o)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 2^x}{x}, \\
 & \text{(p)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{x+3}\right)^{5x-x^2}, \quad \text{(q)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{1/x}, \quad \text{(r)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

26. Některé příklady ze zkouškových písemek z minulých let:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^6}-1}}{x \log \cos x}, \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 x, \quad \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{1 - \cos \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}, \\
 & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} (4x^2 - 9\pi^2) \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}, \quad \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n^6 + 5n^3 + 1) - \log(n^6 + 1)) (n^3 + \cos n), \\
 & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2^n}{n^8+2^n}\right)^{2^n/n^8}, \quad \text{(g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)^x, \\
 & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2^{x+1}-2} - 1}{\sqrt{1 - \cos x}}, \quad \text{(i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}} - 2^{1/x}\right).
 \end{aligned}$$

27. Necht' f, g jsou funkce spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou spojité v bodě a . Funkce $\max\{f, g\}$ je definována takto:

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in D_f \cap D_g.$$

Stejně tvrzení platí i pro spojitost zleva a zprava.

28. Určete ve kterých bodech jsou spojité (případně zleva, zprava) funkce:

$$(a) f(x) = \max\{x, x^2\}, \quad (b) f(x) = \min\{x, \operatorname{sgn} x\}$$

29. Pro následující funkce vyšetřete spojitost a spočtěte derivaci, včetně jednostranných:

$$\begin{aligned} (a) (x^8 + x^6 - 1)^{157}, \quad (b) \sqrt[n]{x}, \quad (c) \sin(x^3 \cos(\log x)), \quad (d) \frac{e^{x^5} \cos(x+7)}{\log(x^4+1)}, \quad (e) x^x \text{ (jak funkci definovat v nule?)}, \\ (f) x^{x^x}, \quad (g) \arcsin(\sin x), \quad (h) \arcsin \frac{4x}{x^2+4}, \quad (i) \max\{x^2, x^3 + \operatorname{sgn} x\}, \quad (j) (x+2)^2 \sqrt{|x^2-4|}, \quad (k) \sqrt{e^{\sin^2 x} - 1}, \\ (l) \min\{x^2, \sqrt[3]{x}\}, \quad (m) \arcsin \min\left\{1, \frac{1}{x}\right\}, \quad (n) \cos x \cdot [\sin x], \quad (o) \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

PRŮBĚH FUNKCE

30. Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

$$\begin{aligned} (a) \log\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad (b) \sqrt[5]{3x^5 + 5x^3}, \quad (c) \sqrt[5]{1 - \sqrt{x+1}}, \quad (d) \sin x + \frac{1}{6 \sin x}, \quad (e) \frac{e^{|x|}}{|e^x - 3|}, \\ (f) \sqrt{x} + \arcsin \frac{1-x}{1+x}, \quad (g) x^{2-3 \log x}, \quad (h) \frac{4^x - \frac{5}{2}}{(2^x - 2)^2}. \end{aligned}$$