

1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

Najděte všechna reálná řešení rovnic

1. $4^{x-1} + 4^{2-x} = 5,$
2. $\log_3^2 x + \log_3 9^3 = \log_3 x^5,$
3. $\sin x - \sin(\pi + x) = 2 \sin^2 x.$

Najděte všechna reálná řešení nerovnic

4. $\frac{x-1}{x-4} > \frac{x-2}{x-3},$
5. $\frac{x^2 - x - 4}{x+1} \geq 0,$
6. $|4 - |x - 3|| < 2,$
7. $|x + 1| + |x + 3| < 4,$
8. $\log_2(x^2 + x + 6) > 0,$
9. $x^2 + 1 - |x + 2| > 0,$
10. $\cos^2 x + \frac{3}{2} \cos x - 1 < 0.$

V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete všechna reálná x , pro která platí

11. $cx^2 + x + 1 > 0,$
12. $ce^x \in (-1, 0),$
13. $\log|x| + c \in (-\pi/2, \pi/2),$
14. $|\cos x| - c > 0,$
15. $e^{\sin x} - c \in (0, +\infty).$

Řešte nerovnice a množinu řešení zakreslete do roviny:

16. $xy \geq 0 \quad \& \quad y \leq \sin x;$
17. $(x^2 - y^2) \sin x \geq 0.$

18. Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b|, \\ |a - b| &\leq |a| + |b|, \\ ||a| - |b|| &\leq |a - b|, \\ ||a| - |b|| &\leq |a + b|. \end{aligned}$$

- Výsledky: 1. $x = 1$ nebo $x = 2$, 2. $x = 9$ nebo $x = 27$, 3. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nebo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
 4. $x \in (\frac{5}{2}, 3) \cup (4, +\infty)$, 5. $x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$, 6. $x \in (-3, 1) \cup (5, 9)$, 7. $x \in (-4, 0)$,
 8. $x \in \mathbb{R}$, 9. $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, 10. $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$,

11.

$c < 0$	$x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c}, \frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}\right)$
$c = 0$	$x \in (-1, +\infty)$
$0 < c \leq \frac{1}{4}$	$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c}, +\infty\right)$
$c > \frac{1}{4}$	$x \in \mathbb{R}$

12.

$c > 0$	$\emptyset$
$c = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$c < 0$	$x \in \left(-\infty, \log\left(-\frac{1}{c}\right)\right)$

13. $x \in \left(-e^{\frac{\pi}{2}-c}, -e^{-\frac{\pi}{2}-c}\right) \cup \left(e^{-\frac{\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c}\right)$ pro $c \in \mathbb{R}$ 14.

$c < 0$	$x \in \mathbb{R}$
$0 \leq c < 1$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\arccos c + k\pi, \arccos c + k\pi)$
$c \geq 1$	$\emptyset$

15.

$c < \frac{1}{e}$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{e} \leq c < e$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\arcsin \log c + 2k\pi, \pi - \arcsin \log c + 2k\pi)$
$c \geq e$	$\emptyset$

2. MATEMATICKÁ INDUKCE

Dokažte matematickou indukcí:

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$
2. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$
3. $\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2, n \in \mathbb{N}$
4. $(1+x)^n \geq 1+nx$ pro $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ (Bernoulliho nerovnost)
5. Necht' $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ jsou větší nebo rovny než -1 a mají stejné znaménko. Pak $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$.
6. $n \leq 2^n, n \in \mathbb{N}$
7. $n^2 \leq 2^n, n \in \mathbb{N}, n \neq 3$
8. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$
9. $10^n - 4$ je dělitelné 6 pro každé $n \in \mathbb{N}$
10. Necht' $n, k \in \mathbb{N}$. Pak existují $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $r < k$ a $n = qk + r$. (dělení se zbytkem)
11. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ pro $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
12. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
13. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$
14. $\sum_{k=1}^n \sin kx \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x$ pro $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
15. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$
16. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, n \in \mathbb{N}$
17. $|\sin \sum_{k=1}^n x_k| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k, x_1, \dots, x_n \in \langle 0, \pi \rangle, n \in \mathbb{N}$
18. $(n+1)^n \leq n^{n+1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$
- 19.* $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

Nápovědy:

10. Indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

18. $(n+2)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$

19. Lze využít Bernoulliho nerovnost.

3. VÝROKY

1. Vyjádřete jednoduše množinu $\{a \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}: |x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5\}$.
2. Které z následujících výroků jsou pravdivé a které nepravdivé pro a) $M = \mathbb{N}$, b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$, c) $M = (0, 1)$, d) $M = \{0\}$?
 - (i) $\forall x \in M \exists y \in M \exists z \in M: x = y + z$
 - (ii) $\exists y \in M \forall x \in M \exists z \in M: x = y + z$
 - (iii) $\exists y \in M \exists z \in M \forall x \in M: x = y + z$
3. Jsou pravdivé následující výroky? Napište jejich negace.
 - (i) $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
 - (ii) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
 - (iii) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}: x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
4. Jsou pravdivé následující výroky? Napište jejich negace.
 - (i) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$
 - (ii) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$
 - (iii) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R}: z > x \Rightarrow y < z$
 - (iv) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z > x \Rightarrow y < z$
 - (v) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N}: z < x \Rightarrow y > z$
 - (vi) $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R}: |y - x| < \delta \Rightarrow y < x + \frac{\varepsilon}{3}$
5. Vyjádřete co nejjednodušeji vztah mezi čísly $a, b \in \mathbb{R}$ určený formulí:
 - (i) $\forall c > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |a - x| < c \Rightarrow |b - x| < c$
 - (ii) $\forall c > 0 \forall x \in \mathbb{R}: a - x < c \Rightarrow |b - x| < c$
 - (iii) $\forall c > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |a - x| < c \Rightarrow b - x < c$
 - (iv) $\forall c > 0 \forall x \in \mathbb{R}: a - x < c \Rightarrow b - x < c$
 - (v) $\forall x \in \mathbb{R} \exists u > 0 \forall c \in (0, u): |a - x| < c \Rightarrow |b - x| < u$

Výsledky: 1. $(-\infty, -4)$ 2. a) ne ($x = 1$), ne ($x = 1$ nebo $x = y$), ne; b) ano ($y = 0, z = x$), ano ($y = 0, z = x$), ne ($x = y + z + 1$); c) ano ($y = z = x/2$), ne ($x = y$), ne ($x = \frac{y+z}{2}$); d) ano, ano, ano 3. (i) ano ($\varepsilon = 2, \alpha = a + 1$), (ii) ne ($\alpha = a$), (iii) ano (poslední část platí nezávisle na hodnotách a, ε, α) 4. (i) ano ($y = x$), (ii) ano ($y = 1$), (iii) ne ($x = y - 1, z = y$), (iv) ne ($y = z = x + 1$), (v) ano ($x = 1$), (vi) ano ($\delta = \frac{\varepsilon}{3}$) 5. (i) $a = b$ ($a - c \geq b - c$ & $a + c \leq b + c$), (ii) neplatí pro žádná $a, b \in \mathbb{R}$, (iii) $a \geq b$, (iv) $a \geq b$, (v) platí pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ (stačí zvolit $u > |b - x|$)

4. MNOŽINY A ZOBRAZENÍ

1. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí následující vztahy:

- (i) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- (ii) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- (iii) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (C \cap B) \setminus (A \cap C)$
- (iv) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
- (v) $(A \cup B) \setminus C = A \setminus (C \cup B)$

2. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $A, B \subset Y$. Dokažte následující rovnosti:

- (i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- (ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- (iii) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

3. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $A, B \subset X$. Dokažte následující vztahy:

- (i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- (iii) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

Ukažte, že v posledních dvou vztazích obecně neplatí rovnost.

4. Charakterizujte zobrazení $f: X \rightarrow Y$, pro která platí

- (i) $f^{-1}(f(A)) = A$ pro každou $A \subset X$;
- (ii) $f(f^{-1}(B)) = B$ pro každou $B \subset Y$.

5. Necht' $f: A \rightarrow A$. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení pro A konečnou, resp. A nekonečnou:

- (i) Je-li $f(A)$ konečná, není f prosté.
- (ii) Je-li $f(A)$ nekonečná, je f prosté.
- (iii) Je-li f prosté, je f na.
- (iv) Je-li f na, je f prosté.

Výsledky: 1. (i) ano, (ii) ano, (iii) ne, (iv) ano, (v) ne
(iv) ano; A nekonečná: (i) ano, (ii) ne, (iii) ne, (iv) ne

4. (i) prosté, (ii) na

5. A konečná: (i) ne, (ii) ano, (iii) ano,

5. SUPREMA A INFIMA

1. Necht' $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Předpokládejme, že má nejmenší prvek (tj. minimum, značíme $\min A$). Ukažte, že $\inf A = \min A$. Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro největší prvek (tj. maximum, $\max A$).
2. Nalezněte suprema a infima (případně maxima a minima) následujících množin (pokud existují):
 - a) $A = \langle 0, 1 \rangle$, b) $B = \{1, -5, 7, -3, 50\}$, c) $C = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0\}$,
 - d) $D = (-1, 0) \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, e) $E = (1, 2) \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, f) $F = \{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$.
3. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Označme $s = \inf A$, $S = \sup A$, $t = \inf B$, $T = \sup B$.
 - a) Vyjádřete $\inf(A \cup B)$ a $\sup(A \cup B)$ pomocí hodnot s, S, t, T .
 - b) Lze něco říci o $\inf(A \cap B)$ a $\sup(A \cap B)$?
4. Nalezněte $\sup M$ a $\inf M$, případně $\max M$ a $\min M$:
 - a) $M = \{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, b) $M = \{(-1)^n \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$,
 - c) $M = \{(-1)^n \frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, d) $M = \{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, e) $M = \{\frac{p}{p+q}; p, q \in \mathbb{N}\}$,
 - f) $M = \{\sin x; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$, g) $M = \{\sin x; x \in (0, 2\pi)\}$, h) $M = \{\sin x; x \in (0, \pi)\}$,
 - i) $M = \{n^2 - m^2; m, n \in \mathbb{N}\}$, j) $M = \{n^2 - m^2; m, n \in \mathbb{N}, n > m\}$, k) $M = \{n^2 - m^2; m, n \in \mathbb{N}, n \leq m\}$,
 - l) $M = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$, m) $M = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{Z}\}$, n) $M = \{5^{(-1)^j 3^k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$,
 - o) $M = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi; n \in \mathbb{N}\}$, p) $M = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi; n \in \mathbb{N} \text{ sudé}\}$, q) $M = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi; n \in \mathbb{N} \text{ liché}\}$

Výsledky: 2. a) $\min A = 0$, $\sup A = 1$ b) $\min B = -5$, $\max B = 50$ c) $\inf C = 0$, $\sup C = +\infty$ d) $\inf D = -1$, $\max D = 1$ e) $\inf E = 0$, $\sup E = 2$ f) $\inf F = 0$, $\sup F = 1$

3. a) $\inf(A \cup B) = \min\{s, t\}$, $\sup(A \cup B) = \max\{S, T\}$; b) Je-li $A \cap B \neq \emptyset$, pak $\max\{s, t\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{S, T\}$. Více říci nelze. Uvažte $A = (-1, 1)$ a $B = \{-1, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$.

4. a) $\inf M = 1$, $\max M = 2$ b) $\inf M = -1$, $\sup M = 1$ c) $\min M = -2$, $\max M = \frac{3}{2}$ d) $\inf M = -1$, $\max M = \frac{3}{2}$
 e) $\inf M = 0$, $\sup M = 1$ f) $\min M = -1$, $\max M = 1$ g) $\min M = -1$, $\max M = 1$ h) $\inf M = 0$, $\max M = 1$ i) $\inf M = -\infty$, $\sup M = +\infty$ j) $\min M = 3$, $\sup M = +\infty$ k) $\inf M = -\infty$, $\max M = 0$ l) $\inf M = 0$, $\max M = \frac{5}{6}$
 m) $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$ n) $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$ o) $\inf M = -1$, $\max M = 1$ p) $\min M = 0$, $\sup M = 1$ q) $\inf M = -1$, $\max M = 1$

6. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Spočítejte následující limity posloupností:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^5}}{7 - \frac{3}{n^2}}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+7}{5n+3}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+7)}{n^2+5n+15}, \\ \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}, \quad \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5+3n-2}{4n^5+3n^3+1}, \\ \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0}, \text{ kde } k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_k \neq 0, b_l \neq 0, \\ \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}, \quad \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right), \quad \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n+n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}, \\ \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}, \quad \text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}, k, l \in \mathbb{N}, \quad \text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}, k, l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2. Spočítejte následující limity posloupností:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{1}{n}}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n}, \text{ kde } a_n \geq 0 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+15} - \sqrt{n+1}), \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3}), \quad \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}), \\ \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right), \\ \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}, \quad \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}, \quad \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}}, \\ \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}, \quad \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt{n^2+1}}, \quad \text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+n} - n), \\ \text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}), \quad \text{o) } \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}). \end{aligned}$$

3. Spočítejte následující limity posloupností:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n [kx]}{n^2}, x \in \mathbb{R}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}, \quad \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + [\sqrt[3]{n}]^3}{n - [\sqrt{n+9}]}, \\ \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n, q \in \mathbb{R}, \quad \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a \in (0, +\infty), \quad \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}, \\ \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + 2\sqrt[n]{n}}, \quad \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}, \quad \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}, \\ \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, a, b, c > 0, \quad \text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}}, a > b > 0, \quad \text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}), \\ \text{o) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}. \end{aligned}$$

4. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

5. Spočítejte limity:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}, \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2^n + 17^n}{n! + n + 3^n}, \quad \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}.$$

6. Spočítejte limity:

$$\begin{aligned} \text{a)* } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{4} \sqrt{n}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3} - \sin n - \cos n) \frac{n^5}{\sqrt[3]{2} - 1}, \\ \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \text{g)* } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

7. Pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde

a) $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{k}$ (kde $k > 1$ je parametr); b) $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$;

c) $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}};$ d) $a_n = \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$

8. Spočtěte následující limity posloupností:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^{100} - (4 - \frac{3}{n})^{50}}{(8 - \frac{1}{n})^{34} - (4 + \frac{1}{n})^{51}},$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}},$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100} + n^{99} - 1} - \sqrt{n^{100} + 2n^{99} + 1}},$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \right],$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt[3]{n^3+1}] + [\sqrt[3]{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}},$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt[3]{n^3+1}] - [\sqrt[3]{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}},$
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2016)!}{n^{2016}} \cdot \frac{\sqrt{(n!)^2 + 2016^n} - \sqrt{(n!)^2 - n^{2016}}}{2016^n},$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{4^n + n} - \sqrt{4^n - n}}.$

- Výsledky: 1. a) 0 b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{5}$ d) 2 e) 0 f) 2 g) $\frac{1}{4}$ h) 0 pro $k < l$, $\frac{a_k}{b_l}$ pro $k = l$, $\operatorname{sgn} \frac{a_k}{b_l} \cdot (+\infty)$ pro $k > l$ i) $\frac{1}{2}$
j) $-\frac{1}{2}$ k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{1}{2}$ m) 1 pro $k > l$, 0 pro $k = l$, -1 pro $k < l$ n) 1 pro $k > l$, $-\infty$ pro $k = l$ sudé, -1 pro $k = l$ liché,
 $(-1)^{l+1}$ pro $k < l$
2. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{A}$ pro $A \in \mathbb{R}$, $+\infty$ pro $A = +\infty$ c) 0 d) $\frac{5}{2}$ e) 0 f) neexistuje ($\lim a_{2n} = \frac{1}{2}$, $\lim a_{2n+1} = -\frac{1}{2}$) g) $\frac{2}{3}$
3. a) 1 b) $\frac{x}{2}$ c) $+\infty$ d) 1 e) 2 f) $+\infty$ pro $q > 1$, 1 pro $q = 1$, 0 pro $q \in (-1, 1)$, neexistuje pro $q \leq -1$ g) 1 h) 1
i) neexistuje ($\lim |a_n| = 1$) j) 5 k) 4 l) $\max\{a, b, c\}$ m) $\frac{1}{a}$ n) 0 o) $\frac{2}{3}$
4. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) 1
5. a) neexistuje (studujme $a_{n+2} - a_n$, též pro $\cos n$; lze i $\sin nx$) b) neexistuje (např. $\{a_{4n}\}$ a $\{a_{8n+2}\}$) c) $+\infty$ (zkuste vyjádřit $\sin x + \cos x$ pomocí $\sin(\alpha + \beta)$) d) $\frac{1}{e}$ e) 1 f) 0 g) e^2
6. a) $\frac{1}{k-1}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) 1
7. a) $-\frac{175}{136}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -700 d) 0 e) 2 f) 0 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{2}$

Řešené příklady:

$$1. \lim a_n, \text{ kde } a_n = \frac{(-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{3}}{\sqrt[n]{n^3} - 1}$$

Je $a_{12k} = \frac{1 + \sin(3k\pi) - \cos(4k\pi)}{12k\sqrt[12]{(12k)^3 - 1}} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{12k} = 0$. Na druhou stranu,

$$a_{24k+6} = \frac{1 + \sin(\frac{3}{2}\pi + 6k\pi) - \cos(2\pi + 8k\pi)}{24k+6\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3 - 1}} = \frac{-1}{24k+6\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3 - 1}}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{24k+6} = -\infty$. Zde jsme využili faktu, že posloupnost $\{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{(\sqrt[n]{n})^3\}_{n=1}^{\infty}$, a tedy má stejnou limitu, a dále tvrzení „jedna lomeno kladná nula“ a aritmetiku limit. Tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti $\lim a_n$ neexistuje.

$$2. \lim a_n, \text{ kde } a_n = \frac{3^n - [\sqrt[3]{(n+1)!}]}{3n^3 - [\sqrt[3]{n!}]}$$

Platí $a_n = \frac{[\sqrt[3]{(n+1)!}] - 3^n}{[\sqrt[3]{n!}] - 3n^3}$. Zde je již čitatel i jmenovatel pro velká n kladný (to plyne z růstové škály), takže nebudeme mít potíže při násobení nerovností. Dále je $[\sqrt[3]{(n+1)!}] - 3^n \geq \sqrt[3]{(n+1)!} - 1 - 3^n$ a $[\sqrt[3]{n!}] - 3n^3 \leq \sqrt[3]{n!}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud

$$a_n \geq \frac{\sqrt[3]{(n+1)!} - 1 - 3^n}{\sqrt[3]{n!}} = \sqrt[3]{n+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{n!}} - \sqrt[3]{\frac{27^n}{n!}}$$

pro dostatečně velká n . Podle růstové škály, tvrzení o limitě třetí odmocniny a aritmetiky limit má výraz vpravo limitu $+\infty$. Z věty o jednom policajtoví pak plyne $\lim a_n = +\infty$.

$$3. \lim a_n, \text{ kde } a_n = \sqrt[n]{[n^4 \cos n] - n^2 3^n + 4^n}$$

Vytkneme-li dominantní člen 4^n , obdržíme $a_n = 4 \cdot \sqrt[n]{\frac{[n^4 \cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1}$. Platí $\lim \frac{n^2 3^n}{4^n} = \lim \frac{n^2}{(\frac{4}{3})^n} = 0$ podle růstové škály. Dále

$$\frac{-n^4 - 1}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n - 1}{4^n} \leq \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n}{4^n} \leq \frac{n^4}{4^n},$$

a tedy $\lim \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} = 0$ dle růstové škály, aritmetiky limit a věty o dvou policajtech. Další použití aritmetiky limit nám pak dává $\lim(\frac{[n^4 \cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1) = 1$. Podle definice limity tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{1}{2} < \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1 < 2$. Odtud $4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < a_n < 4 \cdot \sqrt[n]{2}$ pro $n \geq n_0$. S pomocí známých limit a věty o dvou policajtech tedy odvodíme, že $\lim a_n = 4$.

4.

$$\begin{aligned} \lim \frac{5 + \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}} &= \lim \frac{5 + \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n}(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}})} = \\ &= \lim \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \cdot \left(\lim \frac{5}{\sqrt{n}} + \lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n}} \right) = 1 \cdot \left(0 + \lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \lim \frac{(n^3 + n^2)^2 - (n^2 + n)^3}{\sqrt{n} \left(\sum_{i=0}^5 \sqrt[6]{(n^3 + n^2)^{2(5-i)} (n^2 + n)^{3i}} \right)} = \lim \frac{-n^5 - 2n^4 - n^3}{n^5 \sqrt{n} \left(\sum_{i=0}^5 \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n})^{2(5-i)} (1 + \frac{1}{n})^{3i}} \right)} = \\ &= \lim \frac{-1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{n} \left(\sum_{i=0}^5 \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n})^{10+i}} \right)} = \frac{-1 - 0 - 0}{+\infty \cdot 6} = 0. \end{aligned}$$

Po vytknutí dominantního členu $\sqrt{n}$ ze jmenovatele jsme využili aritmetiku limit. Následně jsme zlomek rozšířili tak, abychom mohli použít vzorec pro $a^6 - b^6$. Posléze jsme vykrátili dominantní člen v čitateli (n^5) a na závěr jsme použili aritmetiku limit a tvrzení o limitě 6-té odmocniny.

$$5. \lim a_n, \text{ kde } a_n = \left(\frac{2\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + 1} - \cos \frac{n\pi}{4} \right) \frac{2n}{1 - \sqrt[n]{2n}}$$

Platí $\lim \sqrt[n]{2n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$ podle aritmetiky limit. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{2n} > 1$, a tedy $\lim \frac{2n}{1 - \sqrt[n]{2n}} = -\infty$ podle tvrzení „jedna lomeno záporná nula“. Nyní se věnujme výrazu v závorkách. Vytknutím dominantního členu, aplikací aritmetiky limit a tvrzení o limitě odmocniny obdržíme $\lim \frac{2\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + 1} = \lim \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n/6}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 2$. Podle definice limity

tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{2\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + 1} > \frac{3}{2}$. Protože $\cos x \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro $n \geq n_0$ platí

$\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} - \cos \frac{n\pi}{4} > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Vynásobíme-li předchozí nerovnost záporným výrazem $\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$, dostaneme $a_n < \frac{1}{2} \frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$ pro $n \geq n_0$. Odtud podle věty o jednom policajtoví plyne $\lim a_n = -\infty$.

6.

$$\begin{aligned} \lim \frac{\sqrt[6]{n^5+1} - \sqrt[5]{n^4-n^3} + \sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n} - \sqrt[n]{n}} &= \lim \frac{n^{\frac{5}{6}} \left(\frac{\sqrt[6]{n^5+1}}{n^{\frac{5}{6}}} - \frac{\sqrt[5]{n^4-n^3}}{n^{\frac{5}{6}}} + \frac{\sqrt[n]{n^2}}{n^{\frac{5}{6}}} \right)}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{6}} \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{n^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} + \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^{\frac{5}{6}}} \right)}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}} = \\ &= \lim n^{\frac{1}{3}} \cdot \lim \frac{\left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{n^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} + \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^{\frac{5}{6}}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}}} = +\infty \cdot \frac{1+0+0}{1} = +\infty. \end{aligned}$$

Po vytknutí dominantních členů jsme využili aritmetiku limit a pro výpočet limity posledního zlomku znovu aritmetiku limit, tvrzení o limitě k -té odmocniny pro $k = 2, 5, 6$, a fakt, že $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

7. HROMADNÉ HODNOTY POSLOUPNOSTÍ

1. Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin n \frac{\pi}{4}$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sin n \frac{\pi}{4}$.
2. Najděte všechny hromadné hodnoty posloupnosti $\{\sin n \frac{\pi}{4}\}$.
3. Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin n \frac{\pi}{3}$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sin n \frac{\pi}{3}$.
4. Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ a určete velikost množiny hromadných hodnot posloupnosti $\{\sin n \frac{\pi}{10}\}$.
5. Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sin n \frac{\pi}{4} + \cos n \frac{\pi}{4})$.

Výsledky: 1. $1, -1$, 2. $\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\}$, 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 4. $1, -1, 11$, 5. $\sqrt{2}$ (posloupnost nabývá hodnot $1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, 1$; neplatí aritmetika pro $\limsup$).

8. LIMITY FUNKCÍ

1. Spočítejte následující limity funkcí ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry):

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right), \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}, \\
 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}, \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}, \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \\
 & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (1+nx)}{x^2 + x^5}, \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \\
 & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x), \quad \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right], \quad \text{n) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}, \quad \text{o) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{1+x^2} + x), \\
 & \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad \text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad \text{r) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}, \quad \text{s) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}, \\
 & \text{t) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x + x^2}, \quad \text{u) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x - \sqrt{x + \sqrt{x}}} \right), \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}, \\
 & \text{w) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - 1 - x}, \quad \text{x) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}, \quad \text{y) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, \quad \text{z) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}
 \end{aligned}$$

2. Spočítejte následující limity funkcí ($a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry):

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} x, \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}, \\
 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}, \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin ax - \cos ax}, \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin^2 x}, \\
 & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}, \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}, \quad \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}, \quad \text{n) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}, \\
 & \text{o) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x^2}{x^3 - 1}, \quad \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 15)}{\log(x^{15} + 3)}, \quad \text{q) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 2^x}{x}, \quad \text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}, \quad \text{s) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)
 \end{aligned}$$

3. Spočítejte následující limity funkcí ($a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry):

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{x + 3} \right)^{5x - x^2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2 \sin x)}{x}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}, \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}, \\
 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x + \sin x)}{\operatorname{tg} x}, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}, \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}, \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot^2 x}, \\
 & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}, \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}, \quad \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}, \quad \text{n) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}, \quad \text{o) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x 2^x}{1 + x 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \\
 & \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + 2^x) \cdot \log \left(1 + \frac{3}{x} \right), \quad \text{q) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^2}, \quad \text{r) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^3}, \quad \text{s) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)} x^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
 & \text{t) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}), \quad \text{u) } \lim_{x \rightarrow 0+} \log(x \log a) \cdot \log \left(\frac{\log ax}{\log \frac{x}{a}} \right), \quad a > 1, \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2}, \\
 & \text{w) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 3x}}{\log(1 + x^2)}, \quad \text{x) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}
 \end{aligned}$$

4. Spočítejte následující limity funkcí ($\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sqrt{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}, \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}, \\
 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log \cos(\pi 4^x)}, \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}, \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1 + \sin^3 x}}{x^3}, \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{x-1} + \sqrt[3]{\cos \pi x}}{\log^2 x}, \\
 & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^\alpha}}
 \end{aligned}$$

- Výsledky: 1. a) $\frac{5}{21}$ b) 2 c) $+\infty$ d) 6 e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ h) $\frac{m}{n}$ i) $\frac{1}{2}mn(n-m)$ j) $\frac{1}{2}n(n-1)$ k) $\frac{1}{2}n(n+1)$
l) neexistuje (zleva -1 , zprava 0) m) 1 n) $\frac{1}{3}$ o) $-\frac{1}{2}$ p) 3 q) 1 r) $\frac{12}{5}$ s) $\frac{3}{2}$ t) $\frac{1}{4}$ u) 1 v) $-\frac{1}{16}$ w) $-\frac{1}{2}$ x) $\frac{112}{27}$
y) $\frac{1}{n}$ z) $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$
2. a) -3 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) -1 e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) 2 g) $\frac{a}{b}, b \neq 0$ h) -1 i) $\frac{1}{a}, a \neq 0$ j) $\frac{1}{2}$ k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{3}{4}$ m) $\frac{4}{3}$ n) $-\frac{1}{12}$ o) $\frac{2}{3}$
p) $\frac{1}{5}$ q) $\log 5$ r) 1 s) $\frac{1}{2}$
3. a) -4 b) 0 c) 2 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{a^2}{b^2}, b \neq 0$ f) 1 g) 4 h) e^2 i) e^3 j) e k) 1 l) $\frac{1}{e}$ m) 1 n) $\frac{1}{e}$ o) $\frac{2}{3}$ p) $\log 8$
q) neexistuje (zleva $-\infty$, zprava $+\infty$) r) $+\infty$ s) 0 pro $k > 1$, $\frac{4}{\pi}$ pro $k = 1$, $+\infty$ pro $k < 1$ liché, neexistuje pro $k < 1$ sudé
t) 0 u) $2 \log a$ v) $\frac{3}{2}$ w) $\frac{5}{4\sqrt{2}}$ x) $e^{\frac{3}{2}}$
4. a) 1 b) neexistuje (ani jednostranné) c) 0 d) 1 e) 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha = \frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{8}$ g) 2
h) -1 i) $1 + \frac{\pi^2}{6}$ j) 1 pro $\alpha < 2$, 0 pro $\alpha \geq 2$

9. DERIVACE

1. Určete derivaci (případně jednostranné derivace) následujících funkcí všude tam, kde existují:

- a) $(x^8 + x^6 - 1)^{157}$, b) $\sqrt[n]{x}$, $n > 1$ liché, c) $\frac{1}{4} \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, d) $\sin(x^3 \cos \log x)$, e) $\frac{e^{x^5} \cos(x + 7)}{\log(x^4 + 1)}$, f) $(\sin x)^{|\cos x|}$,
g) $\frac{(\log x)^x}{x^{\log x}}$, h) $\left| \frac{x-1}{1-2x} \right|$, i) $\max\{x^2, x^3 + \operatorname{sgn} x\}$, j) $\min\{x^2, \sqrt[3]{x}\}$, k) $\arcsin \frac{4x}{x^2 + 4}$, l) $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$,
m) $\sqrt{\operatorname{arctg}(\log^2 x)}$, n) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}$, o) $\sqrt[3]{(1 - \exp(1 - x^2))^2}$, p) $\sqrt{\sin x \cos x}$, q) $\arcsin \left| \frac{5x + 2}{3x - 6} \right|$,
r) $\arcsin \min\left\{1, \frac{1}{x}\right\}$, s) $\cos x \cdot [\sin x]$

2. Spočítejte následující limity funkcí:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{3x + 1}$, d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sin x}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$,
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \log x$, g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^\beta x}{x^\gamma}$, $\beta, \gamma > 0$, h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\gamma}{a^x}$, $a > 1, \gamma > 0$,
i) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{x}$, j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$, k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$, l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{x^2}$,
m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}$, n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$, p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$, q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sin(ax)}{\log \sin(bx)}$,
r) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^x - \cos x}{x \log x}$, s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}{x}$, t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$,
u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x}$, v) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x^x - 1)}$, w) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$, x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$, y) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$

Výsledky: 1. a) $f'(x) = 314x^5(4x^2 + 3)(x^8 + x^6 - 1)^{156}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $f'(x) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $f'(0) = +\infty$ c) $f'(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$, $x \in D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ d) $f'(x) = x^2 \cos(x^3 \cos \log x)(3 \cos \log x - \sin \log x)$,
 $x \in (0, +\infty)$ e) $f'(x) = \frac{e^{x^5}}{\log^2(x^4 + 1)} \left(((5x^4 \cos(x + 7) - \sin(x + 7)) \log(x^4 + 1) - \cos(x + 7) \frac{4x^3}{x^4 + 1}) \right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
f) $f'(x) = (\sin x)^{|\cos x|} \operatorname{sgn}(\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \log \sin x \right)$, $x \in D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$
g) $f'(x) = \frac{(\log x)^x}{x^{\log x}} \left(\log(\log x) + \frac{1}{\log x} - \frac{2}{x} \log x \right)$, $x \in D_f = (1, +\infty)$ h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $f'(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1-x}{1-2x}\right) \cdot \frac{1}{(1-2x)^2}$,
 $x \in D_f \setminus \{1\}$, $f'_+(1) = 1$, $f'_-(1) = -1$ i) $f'(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 3x^2$, $x \in (0, +\infty)$, $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = +\infty$
j) $f'(x) = 2x$, $x \in (0, 1)$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(1) = \frac{1}{3}$,
k) $f'(x) = \frac{4 \operatorname{sgn}(4-x^2)}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f'_-(-2) = -\frac{1}{2}$, $f'_+(-2) = \frac{1}{2}$, $f'_-(2) = \frac{1}{2}$, $f'_+(2) = -\frac{1}{2}$ l) $f'(x) = \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$ m) $f'(x) = \frac{\log x}{x \sqrt{\operatorname{arctg}(\log^2 x)(1 + \log^4 x)}}$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$
n) $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$, $f'(x) = \frac{-1}{6\sqrt{x} \sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^2}}$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{4\}$, $f'_+(0) = -\infty$, $f'(4) = -\infty$ o) $f'(x) = \frac{4}{3} \frac{x \exp(1-x^2)}{\sqrt[3]{1 - \exp(1-x^2)}}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f'_-(-1) = -\infty$, $f'_+(-1) = +\infty$, $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, p) $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$,
 $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x \cos x}}$, $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $f'_+(2k\pi) = +\infty$, $f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty$, $f'_+(\pi + 2k\pi) = +\infty$,
 $f'_-(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty$, $k \in \mathbb{Z}$ q) $D_f = \langle -4, \frac{1}{2} \rangle$, $f'(x) = \frac{6 \operatorname{sgn}(5x+2)}{(2-x)\sqrt{2(x+4)(1-2x)}}$, $x \in D_f \setminus \{-4, -\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\}$, $f'_+(-4) = -\infty$,
 $f'_-(-\frac{2}{5}) = -\frac{25}{36}$, $f'_+(-\frac{2}{5}) = \frac{25}{36}$, $f'_-(\frac{1}{2}) = +\infty$, r) $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
 $f'(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, $f'_-(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = -\infty$, s) $f'(x) = 0$, $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $f'(x) = \sin x$,
 $x \in (\pi + 2\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $f'_+(2k\pi) = 0$, $f'_-(\pi + 2k\pi) = 0$, $f'_+(\pi + 2k\pi) = +\infty$, $f'_-(2\pi + 2k\pi) = +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{6}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 (nejsou splněny předpoklady LH) d) 1 (po zderivování neexistuje) e) 0 (po zderivování komplikovanější)
f) 0 g) 0 h) 0 i) $-\infty$ (nejsou splněny předpoklady LH) j) 1 k) 0 (po zderivování neexistuje) l) 0 m) $-\frac{1}{6}$
n) 2 o) $\frac{1}{3}$ p) $\frac{1}{6} \log a$ q) 1 r) 1 s) 1 t) 1 u) 0 v) 1 w) $e^{-\frac{1}{3}}$ x) $-\frac{e}{2}$ y) $-\frac{1}{3}$

1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[3]{(x^4-1)^2}, \quad \text{b) } |x| \exp(-|x-1|), \quad \text{c) } |x-2| - 2 \operatorname{arctg} x, \quad \text{d) } |x-1| \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right), \quad \text{e) } \arccos \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|, \\ \text{f) } \frac{\cos x}{2+\sin x}, \quad \text{g) } \log\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \text{h) } \sqrt[5]{3x^5+5x^3}, \quad \text{i) } \sqrt[5]{1-\sqrt{x+1}}, \quad \text{j) } \sin x + \frac{1}{6\sin x}, \quad \text{k) } \frac{e^{|x|}}{|e^x-3|}, \\ \text{l) } \sqrt{x} + \arcsin \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{m) } x^{2-3\log x}, \quad \text{n) } \frac{4^x - \frac{5}{2}}{(2^x-2)^2}, \quad \text{o) } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{4\cos^2 x} \end{aligned}$$

Výsledky: 1. a) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá, sudá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \frac{8}{3} \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f'_-(-1) = f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(-1) = f'_+(1) = +\infty$, f je klesající na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, rostoucí na $(-1, 0)$ a $(1, +\infty)$, f má v 0 lokální maximum, v -1 a 1 globální minima, $f''(x) = \frac{8}{9} \frac{x^2(5x^4-9)}{\sqrt[3]{(x^4-1)^4}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, f je na $(-1, 1)$ konkávní, na $(-\infty, -\sqrt{3/\sqrt{5}})$ a na $(\sqrt{3/\sqrt{5}}, +\infty)$ ryze konvexní, na $(-\sqrt{3/\sqrt{5}}, -1)$ a $(1, \sqrt{3/\sqrt{5}})$ ryze konkávní, body $\pm\sqrt{3/\sqrt{5}}$ jsou inflexní

b) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \exp(-|x-1|)(\operatorname{sgn} x - |x| \operatorname{sgn}(x-1))$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f'_-(0) = -\frac{1}{e}$, $f'_+(0) = \frac{1}{e}$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(1) = 0$, f je rostoucí na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, klesající na $(-1, 0)$ a $(1, +\infty)$, f má v -1 lokální maximum, v 0 globální minimum, v 1 globální maximum, $f''(x) = -(x+2)\exp(x-1)$ pro $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) = (x+2)\exp(x-1)$ pro $x \in (0, 1)$, $f''(x) = (x-2)\exp(1-x)$ pro $x \in (1, +\infty)$, f je ryze konvexní na $(-\infty, -2)$, $(0, 1)$ a $(2, +\infty)$, ryze konkávní na $(-2, 0)$ a $(1, 2)$, body ± 2 jsou inflexní

c) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \operatorname{sgn}(x-2) - \frac{2}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'_-(2) = -\frac{7}{5}$, $f'_+(2) = \frac{3}{5}$, f je klesající na $(-\infty, 2)$, rostoucí na $(2, +\infty)$, f má ve 2 globální minimum, $f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, f je ryze konkávní na $(-\infty, 0)$, ryze konvexní na $(0, 2)$ a $(2, +\infty)$, bod 0 je inflexní, asymptota v $+\infty$ je $y = x - 2 - \pi$, asymptota v $-\infty$ je $y = 2 + \pi - x$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f je spojitá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $f'(x) = \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \operatorname{sgn}(x-1) \left(1 + \frac{2}{(x-1)^2}\right)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f je klesající na $(-\infty, 1)$, rostoucí na $(1, +\infty)$, $f''(x) = 2 \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \frac{-x^2+2x+1}{|x-1|^5}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f je ryze konkávní na $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ a $(1+\sqrt{2}, +\infty)$, ryze konvexní na $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, body $1 \pm \sqrt{2}$ jsou inflexní, asymptota v $-\infty$ je $y = -x + 1$, asymptota v $+\infty$ je $y = x - 1$

e) $D_f = (-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$, f je spojitá na D_f , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pi/3$, $f(0) = f(2/3) = 0$, $f'(x) = -\frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{(1-2x)\sqrt{x(3x-2)}}$ pro $x \in D_f \setminus \{0, 2/3, 1\}$, $f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(2/3) = +\infty$, $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = -1$, f je klesající na $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$, rostoucí na $(2/3, 1)$, f má v 1 globální maximum, v 0 a 2/3 globální minimum, $f''(x) = \frac{(-12x^2+9x-1)\operatorname{sgn}(1-x)}{x(1-2x)^2(3x-2)\sqrt{x(3x-2)}}$ pro $x \in D_f \setminus \{0, 2/3, 1\}$, f je ryze konkávní na $(-\infty, 0)$ a $(2/3, 1)$, ryze konvexní na $(1, +\infty)$

f) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá, periodická s periodou 2π , $f'(x) = -\frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$, f je klesající na $(-\pi, -5\pi/6)$ a $(-\pi/6, \pi)$, rostoucí na $(-5\pi/6, -\pi/6)$, f má v $-\pi/6$ globální maximum, v $-5\pi/6$ globální minimum, $f''(x) = \frac{2\cos x(\sin x-1)}{(2+\sin x)^3}$ pro $x \in \mathbb{R}$, f je ryze konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$ a $(\pi/2, \pi)$, ryze konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$, body $\pm\pi/2$ jsou inflexní

g) $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)}$, $f''(x) = -\frac{x^4-4x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}$

h) $f'(x) = \frac{3(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^2(3x^2+5)^4}}$, $f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{\sqrt[5]{x^7(3x^2+5)^9}}$

i) $f'(x) = \frac{-1}{10\sqrt{x+1}\sqrt[5]{(1-\sqrt{x+1})^4}}$, $f''(x) = \frac{5-9\sqrt{x+1}}{100\sqrt{(x+1)^3}\sqrt[5]{(1-\sqrt{x+1})^9}}$

j) $f'(x) = \cos x - \frac{6\sin^2-1}{6(1-\cos^2 x)}$, $f''(x) = \frac{(3\sin^2 x+2)(1-2\sin^2 x)}{6\sin^3 x}$

k) $f'(x) = -\frac{3e^x}{(e^x-3)^2}$ pro $x \in (\log 3, +\infty)$, $f'(x) = \frac{3e^x}{(e^x-3)^2}$ pro $x \in (0, \log 3)$, $f'(x) = \frac{2e^x-3}{e^x(e^x-3)^2}$ pro $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) = \frac{3e^x(e^x+3)}{(e^x-3)^3}$ pro $x \in (\log 3, +\infty)$, $f''(x) = \frac{3e^x(e^x+3)}{(3-e^x)^3}$ pro $x \in (0, \log 3)$, $f''(x) = \frac{4e^{2x}-9e^x+9}{e^x(3-e^x)^3}$ pro $x \in (-\infty, 0)$

l) $f'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x(x+1)}}$, $f''(x) = -\frac{x^2-4x-1}{4\sqrt{x^3(x+1)^2}}$

m) $f'(x) = 2x^{1-3\log x}(1-3\log x)$, $f''(x) = 2x^{-3\log x}(3\log x-2)(1+6\log x)$

n) $f'(x) = \frac{2^x(5-2^{x+2})\log 2}{(2^x-2)^3}$, $f''(x) = \frac{2^{x+1}(2^{2x+1}+3\cdot 2^x-5)\log^2 2}{(2^x-2)^4}$

o) $f'(x) = \frac{4\sqrt{5}\sin 2x}{16\cos^4 x+5}$, $f''(x) = 8\sqrt{5} \cdot \frac{32\cos^6 x-48\cos^4 x-10\cos^2 x+5}{(16\cos^4 x+5)^2}$