

I. Úvod

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \dots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \dots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \dots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \dots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \dots$ prázdná množina
- $A \cup B \dots$ sjednocení množin A a B
- $A \cap B \dots$ průnik množin A a B
- disjunktní množiny $\dots A$ a B jsou disjunktní, pokud $A \cap B = \emptyset$
- $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\} \dots$ rozdíl množin A a B
- $A_1 \times \dots \times A_m = \{[a_1, \dots, a_m]; a_1 \in A_1, \dots, a_m \in A_m\} \dots$ kartézský součin

Nechť I je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin A_α , kde indexy α probíhají I .

- $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \dots$ množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α
- $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \dots$ množina prvků, které náležejí do každé z množin A_α

I.2. Výroková logika, metody důkazů

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non $\dots$ negace
- $\&$ (někdy též $\wedge$) $\dots$ konjunkce, logické „a“
- $\vee \dots$ disjunkce (alternativa), logické „nebo“
- $\Rightarrow \dots$ implikace
- $\Leftrightarrow \dots$ ekvivalence

Jsou-li A, B, C výroky, pak následující složené výroky jsou vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A, B, C :

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \& \neg A)$
- $((A \& B) \& C) \Leftrightarrow (A \& (B \& C))$
- $\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \& \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A))$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Výrokovou formou rozumíme výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvku (prvků) dané množiny za proměnnou (proměnné).

Obecný zápis:

$$V(x), x \in M$$

$$V(x_1, \dots, x_n), x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$$

Je-li $A(x), x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$.“ zapisujeme takto:

$$\forall x \in M : A(x).$$

Výrok „Existuje x z M , pro které platí $A(x)$.“ zapisujeme takto:

$$\exists x \in M : A(x).$$

Výrok „Existuje jediné x z M , pro které platí $A(x)$.“ zapisujeme takto:

$$\exists! x \in M : A(x).$$

Jsou-li $A(x), x \in M$ a $B(x), x \in M$ výrokové formy, pak

$$\forall x \in M, B(x) : A(x) \text{ znamená } \forall x \in M : (B(x) \Rightarrow A(x)),$$

$$\exists x \in M, B(x) : A(x) \text{ znamená } \exists x \in M : (A(x) \& B(x)).$$

Negace výroků s kvantifikátory:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \text{ je totéž co } \exists x \in M : \neg A(x),$$

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \text{ je totéž co } \forall x \in M : \neg A(x).$$

Věta 1 (de Morganova pravidla). *Mějme množiny $S, A_\alpha, \alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$. Pak platí*

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha) \quad a \quad S \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha).$$

Příklad (iracionalita $\sqrt{2}$). Jestliže reálné číslo x řeší rovnici $x^2 = 2$, pak x není racionální.

I.3. Číselné množiny

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\},$$

přičemž $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, právě když $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$.

Reálná čísla

Množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace *sčítání* a *násobení* (značíme je $+$ a $\cdot$), a relace *uspořádání* (značíme ji $\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

III. Axiom infima.

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu *nulový prvek*), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$ (y je tzv. *opačné číslo* k číslu x , takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. *jednotkový prvek*, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita).

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zdola*, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí, že $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá *dolní závorou* množiny M . Analogicky definujeme pojmy *množina omezená shora* a *horní závora*. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima:

Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

- (i) $\forall x \in M: x \geq g$,
- (ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g \exists x \in M: x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme *infimum* M .

Poznámka.

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny M je její největší dolní závora.
- Reálná čísla existují a jsou vlastnostmi I–III určena jednoznačně.

Platí:

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}: -x = (-1) \cdot x$,
- (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,
- (iv) $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: x^{-n} = (x^{-1})^n$,
- (v) $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,
- (vi) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}: x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$,
- (vii) $(-1)^2 = 1$,
- (viii) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$,
- (ix) $0 < 1$.

Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- *Otevřený interval* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,
- *uzavřený interval* $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,
- *polouzavřený interval* $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$,
- *polouzavřený interval* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá *levý krajní bod intervalu*, bod b se nazývá *pravý krajní bod intervalu*. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. *vnitřním bodem intervalu*.

Neomezené intervaly:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\},$$

analogicky definujeme $(-\infty, a)$, $\langle a, +\infty \rangle$ a $(-\infty, +\infty)$. Platí, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí.

Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem *iracionálním*. Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se nazývá *množinou čísel iracionálních*.

Komplexní čísla

Množinou *komplexních čísel* rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí $i \cdot i = -1$.

Věta („základní věta algebry“). Necht' $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Důsledky axiomu infima

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

- (i) $\forall x \in M: x \leq G$,
- (ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme *supremem* množiny M .

Věta 2 (o supremu). Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M .

Supremum množiny M značíme $\sup M$.

Platí $\sup M = -\inf(-M)$.

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *největší prvek* (*maximum*) množiny M (značíme $\max M$), jestliže a je horní závorou množiny M a $a \in M$. Analogicky definujeme *nejmenší prvek* (*minimum*) M , který značíme $\min M$.

Lemma 3. Necht' $M \subset \mathbb{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \quad \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y: z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 4 (Archimédova vlastnost). Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Věta 5 (existence celé části). Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje celá část čísla r , tj. číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. Celá část čísla r je určena jednoznačně a značíme ji $[r]$.

Věta 6 (o n -té odmocnině). Ke každému $x \in (0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné $y \in (0, +\infty)$ splňující $y^n = x$.

Věta 7 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Bud' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.

II. Limita posloupnosti

II.1. Úvod

Definice. Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n , potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *posloupnost* reálných čísel. Číslo a_n nazveme *n-tým členem* této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Množinou členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}: a_n = x\}.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *shora omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- *zdola omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- *omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *rostoucí*, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *klesající*, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *nerostoucí*, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *neklesající*, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je *monotónní*, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je *ryze monotónní*, pokud je rostoucí či klesající.

II.2. Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0 , že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní*, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$, které je limitou $\{a_n\}$.

Věta 8 (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Poznámka. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0.$$

Věta 9. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je *vybranou posloupností* z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též *podposloupností* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Věta 10 (limita vybrané posloupnosti). *Necht' $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.*

Definice. Bud' te $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- *Součtem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme *rozdíl* a *součin posloupností*.
- Necht' všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak *podílem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak λ -násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.

Věta 11 (aritmetika limit). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

- (i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,
- (ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (iii) *je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.*

Věta 12. *Necht' $\lim a_n = 0$ a necht' posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Věta 13 (limita a uspořádání). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.*

- (i) *Necht' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*
- (ii) *Necht' $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.*

Věta 14 (o dvou policajtech). *Bud'te $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ taková posloupnost, že platí:*

- (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí, že $\lim c_n = \lim a_n$.

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (*plus nekonečno*), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (*minus nekonečno*), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n < K.$$

Věta 8 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje* k $+\infty$, podobně pro $-\infty$. Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *vlastní* limitu, je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní* limitu.

Věta 9 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

Věta 9'.

- *Necht' $\lim a_n = +\infty$. Pak posloupnost $\{a_n\}$ není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Necht' $\lim a_n = -\infty$. Pak posloupnost $\{a_n\}$ není zdola omezená, je však shora omezená.*

Věta 10 (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.

Definice. *Rozšířenou reálnou osou* rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,
- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,
- $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Věta 11' (aritmetika limit). *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:*

- (i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*
- (ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*
- (iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 15. *Necht' $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Pak $\lim a_n/b_n = +\infty$.*

Věta 13 (limita a uspořádání) a Věta 14 (o dvou policajtech) platí i pro nevlastní limity. Dokonce platí

Věta 14' (o jednom policajtově). *Bud'te $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti.*

- *Jestliže $\lim a_n = +\infty$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $b_n \geq a_n$, pak $\lim b_n = +\infty$.*
- *Jestliže $\lim a_n = -\infty$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $b_n \leq a_n$, pak $\lim b_n = -\infty$.*

Definice. Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Lemma 16. *Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) $G = \sup M$.
- (ii) *Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ bodů z M , pro kterou $\lim x_n = G$.*

II.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 17 (o limitě monotónní posloupnosti). *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

Věta 18 (Bolzano-Weierstraß). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

III. Zobrazení

Definice. Necht' A a B jsou množiny. *Zobrazením f množiny A do množiny B* nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B . Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá *obrazem* prvku x , prvek x se nazývá *vzorem* prvku y .

- Symbolem $f: A \rightarrow B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B .
- Symbolem $f: x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme *definičním oborem zobrazení f* a značíme ji symbolem D_f .

Definice. Necht' $f: A \rightarrow B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B; x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá *grafem zobrazení f* .
- *Obrazem* množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(M) = \{y \in B; \exists x \in M: f(x) = y\} \quad (= \{f(x); x \in M\}).$$

- Množina $f(A)$ se nazývá *obor hodnot* zobrazení f . (Značíme R_f nebo H_f .)
- *Vzorem* množiny $W \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu

$$f_{-1}(W) = \{x \in A; f(x) \in W\}.$$

Poznámka. Necht' $f: A \rightarrow B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Definice. Necht' A, B, C jsou množiny, $C \subset A$ a $f: A \rightarrow B$. *Zúžením (restrikcí) zobrazení f na množinu C* rozumíme zobrazení $\tilde{f}: C \rightarrow B$ definované předpisem $\tilde{f}(x) = f(x)$ pro každé $x \in C$. Značíme $f|_C$.

Definice. Necht' $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá *složeným zobrazením*.

Definice. Řekneme, že zobrazení $f: A \rightarrow B$

- *zobrazuje množinu A na množinu B* , jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- *je prosté*, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

- *je bijekce A na B* (nebo též *vzájemně jednoznačné zobrazení*), jestliže je zároveň prosté a zobrazuje A na B .

Definice. Necht' $f: A \rightarrow B$ je bijekce (tj. f je prosté a na). *Inverzním zobrazením $f^{-1}: B \rightarrow A$* rozumíme zobrazení, které každému prvku $y \in B$ přiřadí (jednoznačně určený) prvek $x \in A$ splňující $f(x) = y$.

IV. Funkce jedné reálné proměnné

IV.1. Základní pojmy

Definice. Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen *funkce*) je zobrazení $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je *rostoucí* na intervalu J , jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci *klesající* (*neklesající*, *nerostoucí*) na intervalu J .

Definice. *Monotónní funkci* (resp. *ryze monotónní funkci*) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J .

Definice. Necht' f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- *shora omezená* na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- *zdola omezená* na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- *omezená* na M , jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- *lichá*, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- *sudá*, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- *periodická s periodou a* , kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f$, $x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

IV.2. Limita funkce

Definice. Necht' $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *okolí bodu c o poloměru ε* jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- *prstencové okolí bodu c o poloměru ε* jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$* , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 19 (jednoznačnost limity). *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.*

Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Definice. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$* , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Poznámka. Funkce f je spojitá v bodě c , právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Definice. Necht' $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$\begin{aligned} P(+\infty, \varepsilon) &= B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty), \\ P(-\infty, \varepsilon) &= B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon). \end{aligned}$$

Definice. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je *limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$* , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 19 platí i pro $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$, tedy lze použít označení $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Definice. Necht' $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *pravé okolí bodu c* jako $B^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- *levé okolí bodu c* jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,

- *pravé prstencové okolí bodu c* jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu c* jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- *levé okolí bodu $+\infty$* jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- *pravé okolí bodu $-\infty$* jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu $+\infty$* jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- *pravé prstencové okolí bodu $-\infty$* jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Necht' $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c *limitu zprava* rovnou A (značíme $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P^+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem *limity zleva* v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$.

Poznámka. Necht' $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A \right).$$

Definice. Necht' $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c *spojitá zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$).

Věta 20. Necht' funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 21 (aritmetika limit). Necht' $c \in \mathbb{R}^*$. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(i) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován,

(ii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován,

(iii) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$, pokud je výraz A/B definován.

Důsledek. Necht' funkce f a g jsou spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě c . Pokud navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce f/g je spojitá v bodě c .

Věta 22. Necht' $c \in \mathbb{R}^*$. Necht' $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = +\infty$.

Definice. Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \dots, a_n$ se nazývají *koefficienty polynomu P* .

Poznámka. Necht' $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$. Jestliže se polynomy P a Q rovnají (tj. $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak $n = m$ a $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$.

Definice. Necht' P je polynom tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že P je polynom *stupně n* , jestliže $a_n \neq 0$. *Stupeň nulového polynomu* (tj. konstantní nulové funkce definované na $\mathbb{R}$) definujeme jako -1 .

Věta 23 (limita a uspořádání). Necht' $c \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$.

(i) Jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in P(c, \delta): f(x) \leq g(x)$, potom

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(iii) (o dvou policajtech) Necht' existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta): f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Je-li navíc $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom existuje rovněž $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a rovná se A .

Důsledek. Necht' $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a necht' existuje $\eta > 0$ takové, že g je omezená na $P(c, \eta)$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = 0$.

Věta 24 (limita složené funkce). Necht' $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta): g(x) \neq A$,

(S) funkce f je spojitá v bodě A .

Potom

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B.$$

Důsledek. Necht' funkce g je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$. Potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c .

Věta 25 (Heine). Necht' $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a pro funkci f platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Věta 26 (limita monotónní funkce). Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Budiž funkce f monotónní na intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, přičemž platí:

- Je-li f na (a, b) neklesající, pak $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf f((a, b))$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup f((a, b))$.
- Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup f((a, b))$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \inf f((a, b))$.

IV.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. Necht' $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J , jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J ,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J ,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J , pokud tento bod patří do J .

Věta 27 (spojitost složené funkce na intervalu). Necht' I a J jsou intervaly, $g: I \rightarrow J$, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, g je spojitá na I a f je spojitá na J . Potom funkce $f \circ g$ je spojitá na I .

Věta 28 (Heineova věta pro spojitost na intervalu). Necht' funkce f je spojitá na intervalu J a $c \in J$. Potom pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů intervalu J splňující $\lim x_n = c$ platí, že $\lim f(x_n) = f(c)$.

Věta 29 (Bolzano, o nabývání mezihodnot). Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = C$.

Věta 30 (zobrazení intervalu spojitou funkcí). Necht' J je interval a funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na J . Potom je $f(J)$ interval.

Definice. Necht' $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M , jestliže

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M . Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje). Body maxima či minima souhrnně označujeme jako body extrémů.

Definice. Necht' f je reálná funkce a $x \in D_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta): f(y) \leq f(x)$;
- lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta): f(y) \geq f(x)$;
- ostré lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta): f(y) < f(x)$;
- ostré lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta): f(y) > f(x)$.

Bodem lokálního extrému rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 31 (o nabývání extrémů). Necht' f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b \rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Důsledek 32 (omezenost spojitě funkce). Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom je f na $\langle a, b \rangle$ omezená.

Věta 33 (spojitost inverzní funkce). Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

IV.4. Zavedení elementárních funkcí

Věta 34 (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji $\log a$ nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

$$(L1) D_{\log} = (0, +\infty),$$

(L2) *funkce $\log$ je na $(0, +\infty)$ rostoucí,*

$$(L3) \forall x, y \in (0, +\infty): \log xy = \log x + \log y,$$

$$(L4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty): \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in (0, +\infty): \log x^n = n \log x$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty$,
- funkce $\log$ je spojitá na $(0, +\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,
- existuje právě jedno číslo $e \in (0, +\infty)$ takové, že $\log e = 1$.

Definice. *Exponenciální funkci* budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}, H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce $\exp$ je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R}: \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,
- $\forall r \in \mathbb{Q}: \exp r = e^r$.

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. *Obecnou mocninu a^b* definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Definice. Necht' $a, b \in (0, +\infty), a \neq 1$. *Obecný logaritmus $\log_a b$* definujeme jako

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

Věta 35 (zavedení funkce sinus a čísla π). *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit $\sin$), které mají následující vlastnosti:*

$$(S1) D_{\sin} = \mathbb{R},$$

(S2) *sin je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$,*

$$(S3) \sin 0 = 0,$$

$$(S4) \forall x, y \in \mathbb{R}: \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y,$$

$$(S5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definice. Funkcí *kosinus* rozumíme funkci $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce $\cos$ je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce $\cos$ je sudá, funkce $\sin$ je lichá.
- Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou 2π -periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$
- Funkce $\sin$ je rovna nule právě v bodech množiny $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, funkce $\cos$ je rovna nule právě v bodech množiny $\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice. Funkci *tangens* značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x , pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci *kotangens*, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π -periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $H_{\operatorname{tg}} = H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$

Definice.

- Funkcí *arkussinus* (značíme $\arcsin$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí *arkuskosinus* (značíme $\arccos$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{(0, \pi)}$.
- Funkcí *arkustangens* (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí *arkuskotangens* (značíme $\operatorname{arccotg}$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\arctg} = D_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce $\arcsin$ a $\arctg$ jsou liché.
- Funkce $\arcsin$ a $\arctg$ jsou rostoucí, funkce $\arccos$ a $\operatorname{arccotg}$ jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$ a $\operatorname{arccotg}$ jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\arctg 0 = 0$, $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle: \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}: \arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

IV.5. Derivace funkce

Definice. Necht' f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- derivací funkce f v bodě a zprava budeme rozumět číslo

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- derivací funkce f v bodě a zleva budeme rozumět číslo

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud příslušné limity existují.

Definice. Necht' f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ nazveme přímkou

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Věta 36. Necht' funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 37 (aritmetika derivací). Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí, že

$$(i) (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(ii) (\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a),$$

$$(iii) (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

$$(iv) \text{ je-li } g(a) \neq 0, \text{ pak}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 38 (derivace složené funkce). Necht' funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 39 (derivace inverzní funkce). Necht' funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní a má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Věta 40 (nutná podmínka lokálního extrému). *Necht' funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.*

IV.6. Hlubší věty o derivaci funkce

Věta 41 (Rolle). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:*

- (i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*
- (ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) ,*
- (iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Věta 42 (Lagrange, o střední hodnotě). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) . Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 43 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce). *Necht' $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Necht' f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.*

- (i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J .*
- (ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J .*
- (iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J .*
- (iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J .*

Věta 44 (výpočet jednostranné derivace). *Necht' f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Věta 45 (l'Hospitalovo pravidlo). *Necht' funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Necht' platí jedna z následujících podmínek:*

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

IV.7. Konvexní a konkávní funkce

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- *konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

- *konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

- *ryze konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

- *ryze konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Lemma 46. Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Definice. Necht' funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Druhou derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Necht' nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n -tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n + 1)$ -ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Věta 47 (druhá derivace a konvexita). Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.

- (i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b) .
- (ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b) .
- (iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b) .
- (iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b) .

Definice. Necht' f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a , jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a .

Definice. Necht' $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je inflexním bodem funkce f , jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

- (i) $\forall x \in (a - \Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a ,
- (ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a ,

nebo

- (i) $\forall x \in (a - \Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a ,
- (ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)$: $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a .

Věta 48 (nutná podmínka pro inflexi). Necht' $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f . Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 49 (postačující podmínka pro inflexi). Necht' funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Necht' platí:

- $\forall x \in (a, z)$: $f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b)$: $f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f .

IV.8. Průběh funkce

Definice. Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme *asymptotou funkce* f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0).$$

Tvrzení 50. Funkce f má asymptotu v $+\infty$ popsanou afinní funkcí $x \mapsto kx + q$, právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.