1. CVIČENÍ

1) Nechť $f: X \to Y$ je prosté zobrazení a $A, B \subset X$. Ukažte, že je-li $f(A) = f(B)$, pak $A = B$.
2) a) Ukažte, že v grupoidu je jednotkový prvek určen jednoznačně a existuje-li levá i pravá jednotka, pak jsou si rovny a je to jednotka.
   b) Ukažte, že v monoidu M je ke každému $x \in M$ inverzní prvek určen jednoznačně (pokud existuje) a existuje-li k $x \in M$ levý i pravý invers, pak jsou si rovny a je to invers k x.
   c) Ukažte, že množina invertovatelných prvků v monoidu tvoří grupu.
   d) Nechť X je množina. Ukažte, že $M(X) = \{f: X \to X\}$ s operací skládání je monoid. (Co je jednotkou?) Pro jaká $f \in M(X)$ existuje inverzní prvek k f a jak vypadá? Pro jaká $f \in M(X)$ existuje levý invers? Pro jaká $f \in M(X)$ existuje pravý invers? Ukažte, že existuje X a $f \in M(X)$ tak, že f má levý, ale nemá pravý invers (tj. k existenci inverzního zobrazení k f nestačí předpokládat $g \circ f = \mathrm{Id}_X$). Podobně obráceně.
3) Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$ konvexní. Ukažte, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ pro libovolné $x_1, \ldots, x_n \in M$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty)$ splňující $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
4) Nechť $f: A \times B \to \mathbb{R}$. Ukažte, že

$$\sup_{x \in A}\Big(\sup_{y \in B} f(x, y)\Big) = \sup_{y \in B}\Big(\sup_{x \in A} f(x, y)\Big).$$

5) Ukažte, že podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.
6) a) Ukažte, že v součinu metrických prostorů konvergence posloupností funguje „po složkách“.
   b) Nechť X, Y jsou metrické prostory. Ukažte, že je-li A hustá v X a B hustá v Y, pak $A \times B$ je hustá v $X \times Y$.
   c) Ukažte, že součin úplných metrických prostorů je úplný.
7) Dokažte následující větu:

   Věta. *Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g: P \to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P. Jestliže $f = g$ na M, pak $f = g$ na celém P.*

8) a) Ukažte, že podmnožina totálně omezeného metrického prostoru je totálně omezená.
   b) Ukažte, že uzávěr totálně omezené podmnožiny metrického prostoru je totálně omezený.
9) Dokažte následující fakt:

   Fakt. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ je spojitá na P.*

10) Nechť (X, μ) je prostor s mírou a $f, g: X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Ukažte, že $\operatorname{ess\,sup}(f + g) \le \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$.
11) Dokažte následující důsledek Baireovy věty:

    Důsledek. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

12) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dána posloupnost $\{f_n(k)\}_{k=1}^\infty$ předpisem

$$f_n(k) = \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2 k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

    Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Dále zjistěte, zda je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞. Pokud ano, určete její limitu.
13) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1].$$

    Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní v Banachově prostoru X. Pokud ano, určete její limitu.
14) Nechť $Y \subset L_1([0, 1])$ je množina daná předpisem

$$Y = \left\{f \in L_1([0, 1]);\ \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

    Určete, zda Y je podprostor $L_1([0, 1])$, zda je uzavřený a jakou má případně dimenzi.
15) Nechť $Y \subset \ell_2$ je množina daná předpisem

$$Y = \left\{x \in \ell_2;\ \sum_{n=1}^7 x_n = 0\right\}.$$

    Určete, zda Y je podprostor ℓ_2, zda je uzavřený a jakou má případně dimenzi.

2. CVIČENÍ

1) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x,r) = x + B(0,r)$ a $B(0,r) = rB_X$.
2) Ukažte, že $B(x,r)$ a $U(x,r)$ v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.
3) Ukažte, že vnitřek konvexní množiny v normovaném lineárním prostoru je konvexní.
4) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru $\overline{U(x,r)} = B(x,r)$ a $\operatorname{Int} B(x,r) = U(x,r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto identity neplatí.
5) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.
6) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, Y je podprostor X, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\operatorname{dist}(\alpha x, Y) = |\alpha| \operatorname{dist}(x, Y)$.
7) Nechť X je normovaný lineární prostor a $F, K \subset X$ jsou kompaktní. Ukažte, že $F + K$ je kompaktní.
8) Ukažte, že c_0 je uzavřený podprostor c a c je uzavřený podprostor ℓ_∞.
9) a) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0?
   b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0,1])$ a $L_q([0,1])$ pro $p < q$?
   c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?
10) Vektory $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Ukažte, že pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě.
11) Ukažte, že prostor c_0 je separabilní.
12) Ukažte, že prostor ℓ_p, $1 \le p < \infty$ je separabilní.
13) Ukažte, že prostor ℓ_∞ je neseparabilní.

3. CVIČENÍ

1) Ukažme, že prostor $C(K)$, kde K je kompaktní metrický prostor, je separabilní.
2) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná a $1 \le p < \infty$. Ukažme, že pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.
3) Dokažme následující větu:

   Věta. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.*

4. CVIČENÍ

1) Ukažte, že podprostor $\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_1 = 0\} \subset c_0$ je lineárně izometrický celému prostoru c_0.
2) Ukažte, že prostor $L_1([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1.
3) Ukažte, že prostor $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0.
4) Nechť $f : c_0 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n}$ pro $x = (x_n) \in c_0$. Rozhodněte, zda f je spojitý lineární funkcionál na c_0 a pokud ano, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda se normy nabývá.
5) Dokažte následující lemma:

   Lemma. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in S_{X^*}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   (i) Existuje $x \in S_X$ splňující $|f(x)| = 1$.
   (ii) Existuje $x \in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.
   (iii) Existují $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ a $v \in \operatorname{Ker} f$ taková, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.
   (iv) Pro každé $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ existuje $v \in \operatorname{Ker} f$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.

6) Nechť $Y = \left\{x \in c_0;\ \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n} = 0\right\}$. Ukažte, že Y je uzavřený podprostor c_0 a že neexistuje $x \in S_{c_0}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Dále ukažte, že pro žádné $x \in c_0 \setminus Y$ neexistuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

5. A 6. CVIČENÍ

A) Nechť $1 < p < \infty$, $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $f(x,y) = ax + by$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$. Nalezněte globální extrémy f na B_X. Je f je spojitý lineární funkcionál na X? Pokud ano, jaká je jeho norma?

B) Ukažte, že $\phi\colon X \to \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda ϕ své normy nabývá:

1) $X = c$, $\phi((x_n)) = \lim x_n$
2) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$
3) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}$
4) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$
5) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$
6) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$
7) $X = c_0$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$
8) $X = \ell_\infty$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$
9) $X = \ell_2$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$
10) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = f(0)$
11) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = f(0) - f(1)$
12) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$
13) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$
14) $X = L_\infty([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$
15) $X = L_\infty([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$
16) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$
17) $X = L_\infty([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$
18) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$
19) $X = L_1([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$
20) $X = L_1([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$
21) $X = L_1([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$

7. CVIČENÍ

A) Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Položme $e = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, $A = \{e_n;\ n \geq 2\}$ a $X = \operatorname{span}(\{e\} \cup A)$. Ukažte, že A je maximální ortonormální množina v X. Ukažte, že $X \neq \overline{\operatorname{span}}\, A$. Je prostor X úplný? Platí $X = Y \oplus Y^\perp$ pro $Y = \overline{\operatorname{span}}\, A$?

B) Je dán je Hilbertův prostor H a jeho uzavřený podprostor $Y \subset H$. Nalezněte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y, a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $x_0 \in H$.

1) $H = L_2([0,1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 1, $x_0(t) = t^2$.
2) $H = L_2([-1,1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^3$; $x_0 = \sin$.
3) $H = \ell_2$, $Y = \operatorname{span}\{(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}, (\frac{1}{3^n})_{n=1}^{\infty}\}$, $x_0 = e_1$.

8. A 9. CVIČENÍ

Ukažte, že $T\colon X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda T své normy nabývá. Dále zkoumejte následující otázky: Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro. Je operátor T na? Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.

1) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$
2) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
3) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$
4) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$ (pracnější příklad)
5) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$
6) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
7) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{n+1}{n} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
8) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{n}{n+1} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
9) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \dots + x_n)_{n=1}^{\infty}$
10) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$
11) $X = Y = C([0,1])$, $T(f) = f + f(1) - f(0)$
12) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = f(1-t)$
13) $X = Y = C([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = tf(t)$
14) $X = Y = C([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$
15) $X = C([0,r])$, $Y = C^1([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$; na prostoru $C^1([a,b])$ je norma $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'|$.
16) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$
17) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$
18) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$
19) $X = C^1([0,r])$, $Y = C([0,r])$, $T(f) = f'$
20) $X = C^1([0,1])$, $Y = C([0,1])$, $T(f) = f' - f$
21) $X = C^2([0,1])$, $Y = C([0,1])$, $Tf = f'' + f$; na prostoru $C^1([a,b])$ je norma $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'| + \sup|f''|$.
22) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$
23) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = tf(t)$
24) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$
25) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$
26) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f) = (\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}) \cdot f$

10. CVIČENÍ

1) Nechť $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset \ell_\infty = \ell_1^*$. Nalezněte $B_\perp$. Ukažte, že $(B_\perp)^\perp \supsetneqq \overline{\operatorname{span}}\, B$.
2) Položme $X = c_0$ a uvažujme operátor $T\colon X \to c_0$ definovaný předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n) \in X$. Uvědomme si, že T je prostý spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 1$. Položme dále $Y = T(X)$. Ukažme, že pak $T\colon X \to Y$ je na, ale T není otevřené zobrazení.
3) Nechť $Y = (Y, \|\cdot\|_1)$ je libovolný nekonečněrozměrný Banachův prostor. Na Y existuje norma $\|\cdot\|_2$, která není ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$, ale $\|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in Y$. Položme $X = (Y, \|\cdot\|_2)$ a uvažujme lineární operátor $T\colon X \to Y$, $T = \mathrm{Id}_X$. Uvědomme si, že T je spojitý a na. Ukažte, že T není otevřené zobrazení.
4) Nechť P je metrický prostor. Ukažte, že podmnožina $M \subset P$ je relativně kompaktní v P, právě když z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.
5) Nechť Q je metrický prostor a P je jeho podprostor. Ukažte, že je-li podmnožina $M \subset P$ relativně kompaktní v P, pak je též relativně kompaktní v Q.
6) Nechť P je úplný metrický prostor. Ukažte, že podmnožina $M \subset P$ je relativně kompaktní v P, právě když je totálně omezená.
7) Hilbertova krychle: Položme
$$Q = \left\{x = (x_n) \in \ell_2;\ |x_n| \le \tfrac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Ukažme, že Q je kompaktní podmnožina ℓ_2.

11. CVIČENÍ

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

1) $X = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$; napište reprezentující matice.
2) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
3) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
4) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \dots)$
5) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$
6) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (\frac{2}{1}x_2, -\frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_4, -\frac{2}{3}x_3, \dots, \frac{n+1}{n}x_{2n}, -\frac{n}{n+1}x_{2n-1}, \dots)$
7) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
8) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$
9) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T(f)(t) = tf(t)$
10) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T(f)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$
11) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$
12) $X = Y = L_2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min\{s,t\} f(s)\,\mathrm{d}s$
13) $X = Y = L_1([0,2])$, $Tf = f + \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$
14) $X = L_1([0,2\pi])$, $Y = c_0$, $Tf = \left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right)_{n=1}^{\infty}$
15) $X = L_2([0,2\pi])$, $Y = \ell_2$, $Tf = \left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right)_{n=1}^{\infty}$
16) $X = \ell_1$, $Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
17) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
18) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$
19) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f$
20) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = tf(t)$
21) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f(1-t)$
22) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$
23) $X = C([-1,1])$, $Y = C([0,1])$, $Tf = f\restriction_{[0,1]}$

12. a 13. cvičení

A) Určete, zda je operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompaktní.

1) $X = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+x_2)$
2) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
3) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
4) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$
5) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
6) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
7) $X = \ell_2$, $Y = \ell_1$, $T((x_n)) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
8) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
9) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$
10) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = tf(t)$
11) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$
12) $X = L_1([0,2\pi])$, $Y = c_0$, $Tf = \left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t\right)_{n=1}^{\infty}$
13) $X = L_2([0,2\pi])$, $Y = \ell_2$, $Tf = \left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t\right)_{n=1}^{\infty}$
14) $X = \ell_1$, $Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
15) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
16) $X = Y = C([0,1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$
17) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f$
18) $X = C([0,1])$, $Y = C^1([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$
19) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = tf(t)$
20) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$
21) $X = C([-1,1])$, $Y = C([0,1])$, $Tf = f\restriction_{[0,1]}$
22) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \sin(s+t) f(s)\,\mathrm{d}s$
23) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 s f\left(\frac{t+s}{2}\right)\mathrm{d}s$

B) Pro následující operátory $T \in \mathcal{L}(X)$ určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

1) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
2) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
3) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$
4) $X = \ell_1$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \dots)$
5) $X = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
6) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{n+1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$
7) $X = \ell_1$, $T((x_n)) = \left(q_n x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, kde $\{q_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$
8) $X = C([0,1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$
9) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = tf(t)$
10) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$
11) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})^+ f(t)$
12) $X = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(|t|)$
13) $X = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = tf(t)$
14) $X = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$
15) $X = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})^+ \cdot f$
16) $X = L_p(\mathbb{R})$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = f(-t)$
17) $X = C_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(-t)$
18) $X = L_p(\mathbb{R})$, kde $1 \le p \le \infty$, $T(f)(t) = f(t-1)$
19) $X = C_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(t-1)$
20) $X = C_0(\mathbb{R})$, $T(f)(t) = f(2t)$