1. Řady

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n, \quad \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+100}\right)^n, \quad \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7}\right)^n, \quad \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}, \quad \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n,$$

$$\text{m)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x},\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \quad \text{o)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}, \quad \text{p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n-2^n}, \quad \text{q)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right), \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1}\right), \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}},$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad \text{f)* } \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2, \quad \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)},$$

$$\text{h)} \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots, \quad \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}, \quad \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\log n},$$

$$\text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)}, \quad \text{m)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \log \frac{1}{n}, \quad \text{n)} \sum_{n=3}^{\infty} \big(\log(\log n)\big)^{-\log n}$$

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n,$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-3)^n}{n} x^n$$

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right), \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3} - 1\right), \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2\pi)\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}},$$

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}, \quad \text{f)} \sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+17n}}, \quad \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n}\right),$$

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}, \quad \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}, \quad \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{\frac{n^2}{n^2+1}} - 1\right), \quad \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n},$$

$$\text{l)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}, \quad \text{m)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \quad \text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{2-\cos(n\pi)}{4n}, \quad \text{o)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right),\ a \in \mathbb{R}$$

5. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \operatorname{arctg} n, \quad \text{d)} \sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}, \quad \text{e)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{3})}{\log(\log n)}, \quad \text{f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\log^2 n}$$

6. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right), \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right), \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1}\right)\right), \quad \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}, \quad \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{\sqrt{n^2+11}-\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \arcsin\frac{1}{n}, \quad \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha \log n, \quad \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

7. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \sin \frac{1}{n}\right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{n^3}}\right),$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right), \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Nápovědy: 1. l) Pracujte s výrazem $\sin(n+2) - \sin n$. 2. f) Pracujte s výrazem $\sin(n+2)^2 - \sin n^2$ nebo $\sin\big((n+2)^2 - n^2\big)$. h) Vyjádřete a_{n+1} pomocí a_n. n) kondenzační kritérium nebo $a_n = \exp(-\log n \log\log\log n) \le \frac{1}{n^2}$ pro velká n. 4. d) Zkoumejte hodnoty $\cos(n^2\pi)$. g) Pro důkaz monotonie upravit. h) znaménko, monotonie čitatele a jmenovatele l), m) sečíst po 2 nebo odečíst „dominantní“ řadu nebo rozšířit pro vzorec $a^2 - b^2$ n) sečíst po 2 nebo rozdělit o) odečíst a přičíst $n\pi$ 5. b) upravit; $(-1)^n = \cos(\pi n)$ a vzorec pro $\cos(a+b)$ d), f) odečíst „dominantní“ řadu 6. g) derivace 7. f) rozvoje 3. řádu

Výsledky: 1. a) D b) K c) D d) K e) K f) K g) K h) D i) K j) K k) K l) D m) K, právě když $0 < x < \frac{1}{e}$ n) D o) K p) K q) K

2. a) K b) D c) K d) K, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ e) D f) D g) K h) K i) K j) K k) K l) K m) K n) K

3. a) AK pro $x \neq \pm 1$, D pro $x = \pm 1$ b) AK pro $|x| \le 1$, D jinak c) AK pro $|x| < 1$, D jinak d) AK pro $x \in \mathbb{R}$ e) AK pro $|x| \le \frac{1}{2}$, D jinak f) AK pro $|x| < 1$, NAK pro $x = 1$, D jinak g) AK pro $|x| < 1$, NAK pro $x = \pm 1$, D jinak h) AK pro $|x| < \frac{1}{3}$, D jinak

4. a) NAK b) NAK c) AK d) NAK e) AK f) D g) NAK h) NAK i) NAK j) AK k) NAK l) NAK m) D n) D o) AK pro $a = 0$, NAK pro $a \neq 0$

5. a) NAK b) NAK c) NAK d) NAK e) NAK f) NAK

6. a) D b) K c) K d) D e) D f) AK g) NAK h) NAK i) AK pro $\alpha < -1$, D jinak j) K k) K, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ l) K, právě když $a + b > 1$

7. a) K b) K c) D d) D e) K f) K

2. PRIMITIVNÍ FUNKCE

1. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $x^3 + 2x + \frac{17}{x}$, b) $18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x$, c) $\sqrt{x} + \sin(2x)$, d) $\cos(3x) + e^{2x}$, e) $(x+5)^3$,

f) $\sin(2x+7)$, g) $\frac{1}{\cos^2(3-2x)}$, h) $\frac{1}{2x-1}$, i) $\sqrt[3]{1-3x}$, j) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, k) $\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}$, l) $\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$, m) $\frac{x^2}{1+x^2}$,

n) $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$, o) $\frac{1}{2+3x^2}$, p) $\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$, q) $\sqrt{x^6}$, r) $\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}$, s) $\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$, t) $\operatorname{tg}^2 x$, u) $\operatorname{cotg}^2 x$,

v) $|\cos x|$, w) $\sqrt{1-\sin 2x}$, x) $\sin^2 x$, y) $\cos^4 x$, z) $\frac{1}{1+\cos x}$

2. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^{-x^2}, b) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$, c) $\operatorname{tg} x$, d) $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, e) $\frac{x^2}{\cos^2(x^3)}$, f) $\frac{x}{1+4x^2}$, g) $\frac{x}{1+x^4}$, h) $\frac{1}{x\log x}$, i) $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$,

j) $\frac{\sin\log x}{x}$, k) $\frac{e^x}{e^x+1}$, l) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, m) $\frac{x+1}{x^2+2x+9}$, n) $\frac{x^2}{x+1}$, o) $\frac{x^3}{x^8+2}$, p) $\sin^3 x$, q) $\frac{1}{x\log x\log\log x}$,

r) $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$, s) $\frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$, t) $\cos^5 x\sqrt{\sin x}$, u) $\operatorname{tg}^5 x$, v) $\frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, w) $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}}$

3. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^x, b) $\frac{x}{e^x}$, c) $\log x$, d) $x\log x$, e) x^2e^{-2x}, f) $\frac{\cos x}{e^x}$, g) $e^{3x+1}\sin x$, h) $\log^2 x$, i) $x^a\log x$, j) $e^{ax}\sin bx$,

k) $\operatorname{arctg} x$, l) $\arcsin x$, m) $e^{\sqrt{x}}$, n) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, o) $x^5e^{x^3}$, p) $x\sin^2 x$, q) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, r) $\sin\log x$,

s) $xe^x\sin x$, t) $\sqrt{1-x^2}$, u)* $\frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{x+1}{x^2+4}$, b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, c) $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$, d) $\frac{1}{3x^2-2x-1}$, e) $\frac{x}{x^2-x+2}$, f) $\frac{x^5}{x^2+x-2}$, g) $\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)}$,

h) $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, i) $\frac{x}{x^4-2x^2-1}$, j) $\frac{x^{17}-5}{x-1}$, k) $\frac{x^{17}-5}{x^2-1}$, l) $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$, m) $\frac{x}{x^3-1}$,

n) $\frac{3x+2}{(x^2+x+2)^2}$, o) $\frac{1}{1+x^4}$, p) $\frac{x^8+x-1}{x^6+1}$

5. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{1}{\sin x}$, b) $\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$, c) $\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$, d) $\frac{\sin x}{\sin^2 x+\cos x-1}$, e) $\frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$, f) $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$,

g) $\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}$, h) $\frac{1}{\cos x\sin^3 x}$, i) $\frac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$, j) $\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}$, k) $\frac{1}{\sin x+\tan x}$, l) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$,

m) $\frac{x}{1+\sin(x^2+1)}$, n) $\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}$, o) $\frac{1}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$, p) $\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}, a,b>0$,

q) $\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}, 0<\varepsilon<1$, r) $\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$, s) $\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$, t) $\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, u) $\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

6. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{x+3}}$, b) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, c) $\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$, d) $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, e) $\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$,

f) $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$, g) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}$, h) $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$, i) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, j) $\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, k) $\sqrt{x^2-2x}$,

l) $\sqrt{x^2-2x-1}$, m) $\frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$, n) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$, o) $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$, p) $\frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,

q) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, r) $\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, s) $\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$, t) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(5-x)}}$

Návody: 5. a) $\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ b) per partes c) $\int \frac{-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ d) $\int \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t$ e) $6\int \frac{1}{t(1+t+t^2+t^3)}\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ g) $\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ h) $\int \frac{1}{t^3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ i) $\int \frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ j) $-\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ k) $\int \frac{1-t^2}{2t}\,\mathrm{d}t$ l) $-\int \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ m) $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u$, $\int \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ n) $\int \frac{1}{3t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$ o) $\int \frac{1+t^2}{(2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ p) $\int \frac{1}{a^2t^2+b^2}\,\mathrm{d}t$ q) $\int \frac{2}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)t^2}\,\mathrm{d}t$ r) $\int \frac{t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ s) $\int \frac{4t(t^2-1)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)}\,\mathrm{d}t$ t) $\int \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ u) $\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

6. a) $\int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$ b) $\int \frac{2(t^2-t+1)}{(t-2)(2t-1)}\,\mathrm{d}t$ c) $\int 6\frac{t^6-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$ d) $\int \frac{-2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ e) $\int \frac{6t^3(t^6-1)}{(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int 6t^3(t^3-1)(t^2-t+1)\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t$ g) $\int \frac{6t^5(t^2+t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t$ h) $\int \frac{3t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ i) $\int \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$ j) $\int \frac{6t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}\,\mathrm{d}t$ k) $\int \frac{8t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-t^2(t+2)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$ l) $\int \frac{16t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-(t^2+2t-1)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$ m) $\int \frac{t^2+1}{4(t^4+1)}\,\mathrm{d}t$ n) $\int \frac{2(t^2-1)^2}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t$ o) $\int \frac{-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ p) $\int \frac{-4\sqrt{2}t}{(1+t^2)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{t^2+2t-1}{(1-t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ q) $\int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ r) lze využít vzorec pro a^2-b^2, kde $a = 1+\sqrt{x}$ a $b=\sqrt{x+1}$ s) $\int \frac{2t(t^2-3t+2)}{(3-2t)(3t-4)}\,\mathrm{d}t$ t) $20\int \frac{t^4}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}x^4+x^2+17\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ b) $18e^x+2e^{8x}-\log|x|+3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}\cos(2x)$ na $(0,+\infty)$ d) $\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{2}e^{2x}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{4}(x+5)^4$ na $\mathbb{R}$ f) $-\frac{1}{2}\cos(2x+7)$ na $\mathbb{R}$ g) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(3-2x)$ na $\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ h) $\frac{1}{2}\log|2x-1|$ na $(-\infty,\frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2},+\infty)$ i) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$ na $\mathbb{R}$ j) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$ k) $-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ l) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$ na $(-\infty,\frac{2}{5})$ m) $x-\operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}$ na $(0,+\infty)$ o) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ q) $\frac{1}{4}x^4\operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ r) $-\frac{2}{\log 5}5^{-x}+\frac{1}{5\log 2}2^{-x}$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$ na $\mathbb{R}$ t) $-x+\operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ u) $-x-\operatorname{cotg} x$ na $(0,\pi)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k\sin x+2k$ pro $x\in\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ w) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k(\sin x+\cos x)+2\sqrt{2}k$ pro $x\in\langle-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\pi\rangle+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ x) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$ na $\mathbb{R}$ y) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$ na $\mathbb{R}$ z) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi,\pi)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$ na $\mathbb{R}$ c) $-\log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ d) $\sqrt{x^2+5}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$ na $\left(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi},\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right), k\in\mathbb{Z}$ f) $\frac{1}{8}\log(1+4x^2)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\log x|$ na $(0,1)$ a na $(1,+\infty)$ i) $\log(x^2+x+1)$ na $\mathbb{R}$ j) $-\cos\log x$ na $(0,+\infty)$ k) $\log(e^x+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$ m) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+9)$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,+\infty)$ o) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}$ na $\mathbb{R}$ p) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$ na $\mathbb{R}$ q) $\log|\log\log x|$ na $(1,e)$ a na $(e,+\infty)$ r) $e^x-\log(1+e^x)$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\log x}$ na $(\frac{1}{e},+\infty)$ t) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x+\frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}}x$ na $(0,\pi)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ u) $\frac{1}{4}\cos^{-4}x-\cos^{-2}x-\log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, k\in\mathbb{Z}$ w) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x$ na $\mathbb{R}$

3. a) $e^x(x-1)$ na $\mathbb{R}$ b) $-e^{-x}(1+x)$ na $\mathbb{R}$ c) $x(\log x-1)$ na $(0,+\infty)$ d) $\frac{1}{2}x^2(\log x-\frac{1}{2})$ na $(0,+\infty)$ e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x+\frac{1}{2})$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{10}e^{3x+1}(3\sin x-\cos x)$ na $\mathbb{R}$ h) $x(\log^2 x-2\log x+2)$ na $(0,+\infty)$ i) $\frac{x^{1+a}}{1+a}\left(\log x-\frac{1}{1+a}\right)$ na $(0,+\infty)$ pro $a\neq-1$, $\frac{1}{2}\log^2 x$ na $(0,+\infty)$ pro $a=-1$ j) $e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$ na $\mathbb{R}$ k) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ na $(-1,1)$ m) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)$ na $(0,+\infty)$ n) $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{4}(x^2-x\sin 2x+\sin^2 x)$ na $\mathbb{R}$ q) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}x$ na $(0,+\infty)$ r) $\frac{1}{2}x(\sin\log x-\cos\log x)$ na $(0,+\infty)$ s) $\frac{1}{2}e^x\left(x\sin x+(1-x)\cos x\right)$ na $\mathbb{R}$ t) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$ na $(-1,1)$ u) $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ na $\mathbb{R}$

4. a) $\frac{1}{2}\log(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ na $\mathbb{R}$ b) $x+\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ c) $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ d) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$ na $(-\infty,-\frac{1}{3})$, na $(-\frac{1}{3},1)$ a na $(1,+\infty)$ e) $\frac{1}{2}\log(x^2-x+2)+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-5x+\frac{32}{3}\log|x+2|+\frac{1}{3}\log|x-1|$ na $(-\infty,-2)$, na $(-2,1)$ a na $(1,+\infty)$ g) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ h) $2\log\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{4}{x+4}-\frac{1}{x+2}$ na $(-\infty,-4)$, na $(-4,-2)$ a na $(-2,+\infty)$ i) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{|x^2-\sqrt{2}-1|}{x^2+\sqrt{2}-1}$ na $\left(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, na $\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}},\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ a na $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}},+\infty\right)$ j) $-4\log|x-1|+\sum_{k=1}^{17}\frac{x^k}{k}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ k) $3\log|x+1|-2\log|x-1|+\sum_{k=1}^{8}\frac{x^{2k}}{2k}$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ l) $x+\frac{1}{6}\log|x|-\frac{9}{2}\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$ na $(-\infty,0)$, na $(0,2)$, na $(2,3)$ a na $(3,+\infty)$ m) $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ n) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2x+1}{7+(2x+1)^2}+\frac{2\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$ na $\mathbb{R}$ (nápověda k rozkladu: pracujte s výrazem $(x^2+1)^2$) p) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}\log(1+x^2)+\frac{\sqrt{3}-1}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1)-\frac{\sqrt{3}+1}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1)-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})-\frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$ na $\mathbb{R}$

5. a) $\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ na $(0,\pi)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ b) $x-\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})-\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$ na $\mathbb{R}$ c) $-\frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x)$ na $\mathbb{R}$ d) $\log\frac{1-\cos x}{|\cos x|}$ na $(-\frac{\pi}{2},0)+2k\pi$, na $(0,\frac{\pi}{2})+2k\pi$ a na $(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ e) $x-3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}-3\log(e^{\frac{x}{6}}+1)-\frac{3}{2}\log(e^{\frac{x}{3}}+1)$ na $\mathbb{R}$

f) na $(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$: $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}$ pro $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}$ na $(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ i) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}-x+k\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(2k+1)\frac{(4-\sqrt{3})\pi}{2\sqrt{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$ j) $\frac{1}{3}\log(2+\cos x)+\frac{1}{6}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2}\log(1+\cos x)$ na $(0,\pi)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ k) $\frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ na $(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ l) na $(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)+2k\pi$: $F(x)=x+\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ pro $x\neq\pi+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi)=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ m) na $\left(-\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1-2\pi},-\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1}\right)$, na $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}\pi-1},\sqrt{\frac{3}{2}\pi-1}\right)$ a na $\left(\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1},\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1+2\pi}\right)$, $k\in\mathbb{N}$: $F(x)=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x^2+1}{2}}$ pro $x\neq\pm\sqrt{\pi+2k\pi-1}$, $F(\pm\sqrt{\pi+2k\pi-1})=0, k\in\mathbb{Z}$ n) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+k\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ pro $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, $k\in\mathbb{Z}$ o) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}-\frac{\operatorname{tg}x}{4(2+\operatorname{tg}^2 x)}+k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$
p) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)+k\frac{\pi}{ab}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{ab}$, $k\in\mathbb{Z}$ q) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+k\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ pro $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $k\in\mathbb{Z}$ r) na $\mathbb{R}$: $F(x)=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)-k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ s) na $(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$: $F(x)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|$ pro $x\neq\pi+2l\pi$, $F(\pi+2l\pi)=0$, $k,l\in\mathbb{Z}$ t) na $(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$: $F(x)=G(x)$ pro $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(x)=G(x)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$, kde $G(x)=\frac{1}{6}\log\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}$ u) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x-1\right)+k\sqrt{2}\pi$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\sqrt{2}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

6. a) $2\sqrt{x+3}-2\log\left(1+\sqrt{x+3}\right)$ na $(-3,+\infty)$
b) $\sqrt{x^2+x+1}-x+2\log\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|-\frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,+\infty)$
c) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\log x+6\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0,+\infty)$ d) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ na $(1,3)$ e) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ na $(-1,+\infty)$ f) $\frac{-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}-\log\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)$ na $\mathbb{R}$
g) $\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\log\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)$ na $(-1,0)$ a na $(0,+\infty)$
h) $-\log\left|1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right|+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$
i) $\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1,0)$ a na $(0,1)$ j) $\log\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, kde $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, na $(-\infty,-1)$, na $(-1,0)$ a na $(0,+\infty)$ k) $\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\left(x(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}}+\log\left|\sqrt{\frac{x-2}{x}}-1\right|-\log\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}}+1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x}+\frac{1}{2}\log\left|\sqrt{x^2-2x}-x+1\right|$, na $(-\infty,0)$ a na $(2,+\infty)$
l) $\operatorname{sgn}(x-1+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{2}(x-1)(x-1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}+\log\left|\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}-1\right|-\log\left(\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}+1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}+\log\left|\sqrt{x^2-2x-1}-x+1\right|$, na $(-\infty,1-\sqrt{2})$ a na $(1+\sqrt{2},+\infty)$ m) $\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}+1\right)$ na $(-2,2)$ n) $\frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{8}\log\left(2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right)$ na $\mathbb{R}$ o) $-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1,1)$
p) $\log\left(t+\sqrt{2}-1\right)-\log\left(t+\sqrt{2}+1\right)-2\operatorname{arctg}t$, kde $t=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}-x}{x+1+\sqrt{2}}}$, na $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$; nebo $-\log(1-t)-2\operatorname{arctg}t$, kde $t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$, na $(-1-\sqrt{2},0)$ a na $(0,-1+\sqrt{2})$, lze slepit v 0 q) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ na $(1,+\infty)$
r) $\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ na $(0,+\infty)$ s) $\frac{t}{18}-\frac{t^2}{6}+\frac{3}{4}\log|2t-3|-\frac{16}{27}\log|3t-4|$, kde $t=\sqrt{x^2+3x+2}-x$, na $(-\infty,-2)$, na $(-1,-\frac{2}{3})$ a na $(-\frac{2}{3},+\infty)$ t) $\frac{5}{4\sqrt{2}}\log\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)+\frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)-\frac{5t}{1+t^4}$, kde $t=\sqrt[4]{\frac{x}{5-x}}$, na $(0,5)$

3. Určité integrály

1. Spočtěte tyto určité integrály:

$$\text{a)}\ \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_0,\quad \text{b)}\ \int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_0,\quad \text{c)}\ \int_0^{\frac{9}{2}\pi}\sin^n x\cos x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_0,\quad \text{d)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x},$$

$$\text{e)}\ \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x},\quad \text{f)}\ \int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x,\quad \text{g)}\ \int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x,\quad \text{h)}\ \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2},\quad \text{i)}\ \int_0^{+\infty}xe^{-x^2},\quad \text{j)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2},$$

$$\text{k)}\ \int_0^{8\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x},\ 0<\varepsilon<1,\quad \text{l)}\ \int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,\mathrm{d}x$$

Výsledky: 1. a) $n!$ b) $\pi\frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n sudé, $2\frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n liché c) $\frac{1}{n+1}$ d) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ g) 1 h) $\frac{2}{3}\log 2$ i) $\frac{1}{2}$ j) 0 k) $\frac{8\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ l) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

4. Konvergence integrálů

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$):

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{b)}\ \int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x, \quad \text{c)}\ \int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{d)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{e)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{f)}\ \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{g)}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x, \quad \text{h)}\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}, \quad \text{i)}\ \int_1^2 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{j)}\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{k)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{l)}\ \int_7^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{m)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{n)}\ \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{o)}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{p)}\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{q)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{r)}\ \int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{s)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{t)}\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{u)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x\,\mathrm{d}x, \quad \text{v)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x (1-\cos x)^\gamma\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{w)}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}\,\mathrm{d}x, \quad \text{x)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x, \quad \text{y)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x \cdot \log\cos x\,\mathrm{d}x, \quad \text{z)}\ \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\text{a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{b)}\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \sin\frac{1}{x}}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{d)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{e)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{f)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{g)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{h)}\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sin^3 x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x, \quad \text{i)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{j)}\ \int_0^{+\infty} x\cos(x^4)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{k)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,\mathrm{d}x, \quad \text{l)}\ \int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x, \quad \text{m)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{n)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{o)}\ \int_1^{+\infty} \sin(\log x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{p)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{q)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)\cdot\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{r)}\ \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x+2\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{s)}\ \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{t)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \text{u)*}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+\log x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Návody: 1. b) výpočet c) rozdíl integrálů k) růstová škála p) pro $\alpha = 1$ substituce r) $\log\frac{1}{y} = -\log y$ s) Taylor t) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^\alpha}$ spočteme substitucí $x = \operatorname{cotg} y$ z) $\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\beta}$ spočteme substitucí $x = \cos y$

2. d) BC, $|\sin x| \geq \sin^2 x$ g) rozdíl integrálů nebo Abel h) $|\sin x|^3 \geq \sin^4 x$ j)–o) substituce q) substituce r), s) součet integrálů t) $\sin(a+b)$ u) substituce

Výsledky: 1. a) K b) K c) D d) D e) K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ f) D g) K $\Leftrightarrow \alpha < -1 < \alpha + \beta$ h) D i) K j) K k) K l) K m) K n) K $\Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ o) K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ p) K $\Leftrightarrow \alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$ q) K $\Leftrightarrow -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ r) K $\Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$ s) K $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 4$ t) K u) K $\Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ v) K $\Leftrightarrow \beta > -1, \alpha + 2\gamma > -1$ w) K $\Leftrightarrow \max\{\alpha, \beta\} > 1$, $\min\{\alpha, \beta\} < 1$ x) K $\Leftrightarrow 0 < \alpha + 1 < \beta$ y) K $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 1$ z) K $\Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$

2. a) D b) AK c) AK d) AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ e) NAK f) AK g) D h) NAK i) AK pro $1 < \alpha < 5$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ j) NAK k) NAK l) AK pro $\alpha < -1$, NAK pro $\alpha > 1$ m) NAK n) NAK o) D p) AK pro $1 < \alpha < 3$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ q) AK pro $1 < \alpha < 2$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ r) NAK s) D t) NAK pro $0 < \alpha < 2$ u) AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$

5. Aplikace určitého integrálu

1. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami:

$$\text{a) } y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2, \quad \text{b) } y = x^2 - 6x + 8, y = 7 - 4x, y = 2x - 8,$$

$$\text{c) } y = \frac{x^2}{p}, y = \frac{x^2}{q}, y = \sqrt{ax}, y = \sqrt{bx}, 0 < a < b, 0 < p < q$$

2. Vypočtěte plochu elipsy.

3. Vypočtěte délku křivky, která je grafem funkce:

$$\text{a) } \log\cos x, x \in \langle 0, \tfrac{\pi}{6}\rangle, \quad \text{b) } x^{\frac{3}{2}}, x \in \langle 0, 4\rangle, \quad \text{c) } e^x, x \in \langle 0, a\rangle, a > 0$$

4. Vypočtěte obvod kruhu.

5. Vypočtěte délku křivky dané parametrickým vyjádřením ($a > 0$):

$$\text{a) } x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad \text{b) } x(t) = a(\cos t + t\sin t), y(t) = a(\sin t - t\cos t), t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

6. Vyjádřete parametricky asteroidu, tj. rovinný útvar $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$ a vypočtěte jeho délku.

7. Vypočtěte délku části Archimédovy spirály zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$.

8. Vypočtěte objem a) koule, b) kužele, c) rotačního elipsoidu, d) anuloidu.

9. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ležícího v rovině xy kolem osy x. Obrazec je ohraničen křivkami jejichž rovnice jsou $x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$ a $y^2 - x^2 = 1$.

10. Vypočtěte povrch a) koule, b) kužele, c) anuloidu.

11. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in \langle 0, \frac{3}{4}\rangle$ kolem osy x.

Výsledky: 1. a) $\pi - \frac{2}{3}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{1}{3}(b-a)(q-p)$

2. πab

3. a) $\frac{1}{2}\log 3$ b) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ c) $a - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2a}} + \log(1+\sqrt{2}) - \log(1 + \sqrt{1+e^{2a}})$

4. $2\pi r$

5. a) $8a$ b) $2\pi^2$

6. $6a$

7. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\log\bigl(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\bigr)$

8. a) $\frac{4}{3}\pi r^3$ b) $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ c) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ d) $2\pi^2 Rr^2$

9. $\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3} - 2)$

10. a) $4\pi r^2$ b) $\pi\bigl(r\sqrt{r^2+v^2} + r^2\bigr)$ c) $4\pi^2 rR$

11. $\frac{\pi}{16}\bigl(\frac{255}{64} - 2\log 2\bigr)$