vím: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$

chci: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

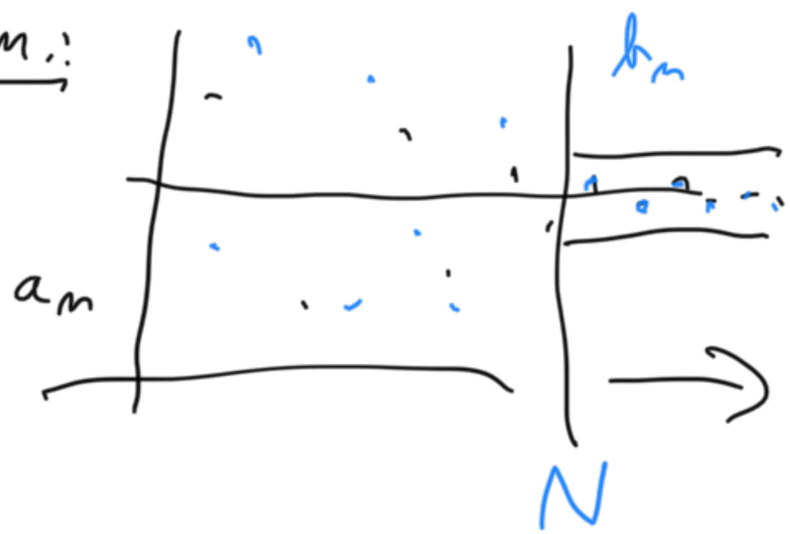
$$\forall \eta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \underbrace{K \cdot \eta}_{\varepsilon}$$

nechť $\varepsilon > 0$ libovolné.

Položím $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$. Dosadím:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < K \cdot \eta = \varepsilon$$

Pozn.:




Jestliže $\{a_n\}, \{b_n\}$ a $\exists N \in \mathbb{N}$: $a_n = b_n$ pro $n \geq N$, pak jestliže $\lim a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim b_n = A$.

Změníme-li konečný počet členů posloupnosti, limita se nesmenn.

(Limita nezávisí na počátečním úseku posloupnosti.)

<u>Důkaz</u>: (i) <u>VÍM</u>: $\begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : |a_n-A|<\varepsilon \\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : |b_n-B|<\varepsilon \end{cases}$

<u>CHCI</u>: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : |(a_n+b_n)-(A+B)|<\varepsilon$

$\to$ $\forall \eta>0\ \exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_1 : |a_n-A|<\eta$

$\forall \eta>0\ \exists n_2\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_2 : |b_n-B|<\eta$

Nechť $\varepsilon>0$ libovolné. Do $\uparrow$ dosadím $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\exists n_1, n_2\in\mathbb{N}$:

$\forall n\geq n_1 : |a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n\geq n_2 : |b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}$

Položím $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Pak $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0$ je $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ & $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}$, takže

$$|(a_n+b_n)-(A+B)|=|(a_n-A)+(b_n-B)|\underset{\uparrow}{\leq}|a_n-A|+|b_n-B|<$$

$\triangle$ nerovnost

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(ii) C(HC): $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n b_n - AB| < \varepsilon$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné.

$$V9 \Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

z def. $\lim a_n = A$: $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|+1}$

z def. $\lim b_n = B$: $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2 : |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Položím $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí zároveň.

Tudíž pro $n \geq n_0$:

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \underset{\triangle \text{ nerovnost}}{\leq}$$

$$\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| =$$

$$= \underset{\leq M}{|a_n|} \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot |B| \leq M \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| <$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

---

(iii) Dle předp. $B \neq 0$. Z def. $\lim b_n = B$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1$:

$$|b_n - B| < \frac{|B|}{2} \quad | \quad \text{tj.: } \big||b_n| - |B|\big| \leq |b_n - B| < \frac{|B|}{2}$$

$K = \frac{2}{...}(A, |A|)$ ...

Položme $K = \frac{2}{|B|}\left(1+\frac{|A|}{|B|}\right)$. $\quad |B| - |b_n| \ldots \quad \Rightarrow |b_n| \geq \frac{|B|}{2}$, tj. $\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|B|}$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné.

$\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2: |a_n - A| < \varepsilon$, $\exists n_3 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_3: |b_n - B| < \varepsilon$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Pak pro $n \geq n_0$ platí zároveň, a tedy

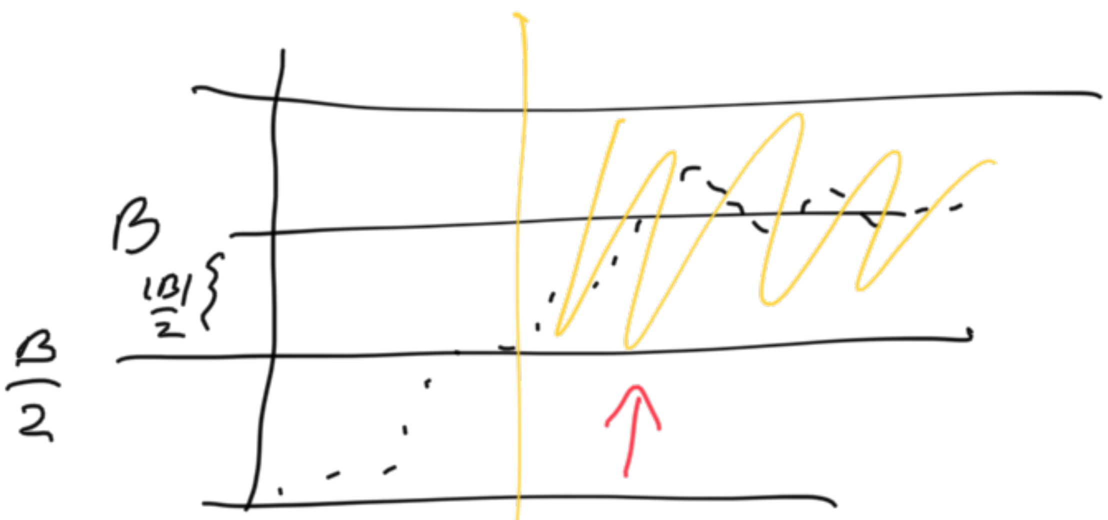
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n \cdot B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n \cdot B}\right| =$$

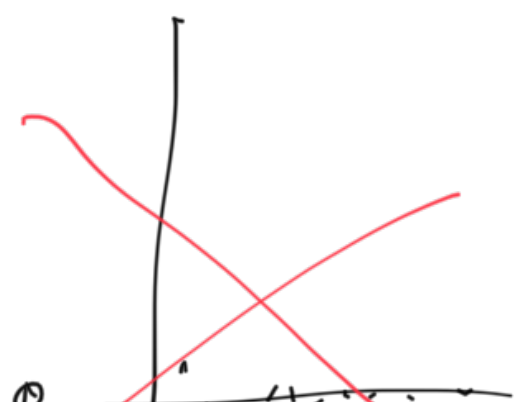
$$\left|\frac{B(a_n - A) + A(B - b_n)}{b_n \cdot B}\right| \underset{\Delta \text{ nerovnost}}{\leq} \left|\frac{\cancel{B}(a_n - A)}{b_n \cdot \cancel{B}}\right| + \left|\frac{A(B - b_n)}{b_n \cdot B}\right| =$$

$$= \frac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - A| + \left|\frac{A}{B}\right| \cdot \frac{1}{|b_n|} \cdot |b_n - B| < \frac{2}{|B|} \cdot \varepsilon + \left|\frac{A}{B}\right| \cdot \frac{2}{|B|} \cdot \varepsilon =$$

$$= \frac{2}{|B|}\left(1 + \frac{|A|}{|B|}\right) \cdot \varepsilon = K \cdot \varepsilon$$

CHCI: $\frac{1}{|b_n|}$ nesmí být velké pro velká $n$, tj. $|b_n|$ nesmí být malá



<u>Pozn</u>: • „limita součtu je součet limit" | „$\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$"

ALE za daných předpokladů, tj. $\lim a_n, \lim b_n \in \mathbb{R}$ !

$a_n = (-1)^n, \; b_n = (-1)^{n+1}$

$a_n + b_n = 0$, tj. $\lim(a_n+b_n) = 0$, ale $\lim a_n$, $\lim b_n$ neexistují

• v (iii) stačí předp., že $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : b_n \neq 0$

(limita nezávisí na počátečním úseku)