Pozn.: Pro libovolné dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ je $\underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D)$.

Pro libovolné pevné D_2 platí, že

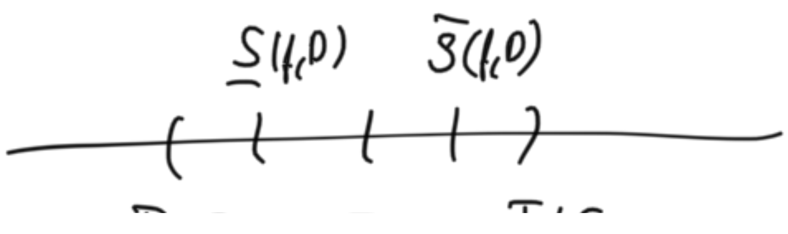
$\forall$ dělení D_1 int. $\langle a,b\rangle$ je $\underline{S}(f,D_1) \le \overline{S}(f,D_2)$, tj.:

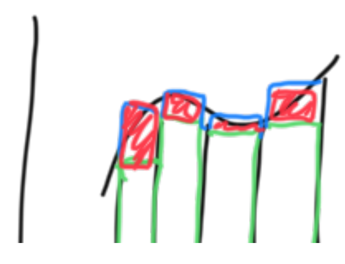
číslo $\overline{S}(f,D_2)$ je horní závora množiny $\{\underline{S}(f,D_1);\ D_1 \text{ je dělení } \langle a,b\rangle\}$.

Tedy
$$\underline{\int_a^b} f = \sup \le \overline{S}(f,D_2).$$

Tedy $\forall$ dělení D_2 int. $\langle a,b\rangle$ platí ⤴, takže číslo $\underline{\int_a^b} f$ je dolní závora množiny $\{\overline{S}(f,D_2);\ D_2 \text{ je dělení } \langle a,b\rangle\}$.

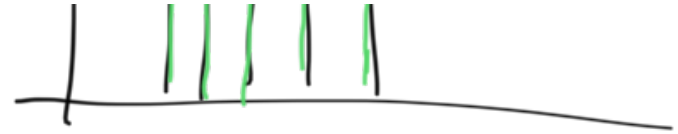
$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f.$$





$$\boxed{\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D)}$$

$I-\varepsilon$ I $I+\varepsilon$



Důkaz: (a) „$\Rightarrow$" Zvolme $\varepsilon > 0$.

$\overline{\int_a^b} f = I$, tedy $\exists$ dělení D_1 int. $\langle a,b\rangle$ takové, že

$$\overline{S}(f,D_1) < I+\varepsilon.$$

$\underline{\int_a^b} f = I$, tedy $\exists$ dělení D_2 int. $\langle a,b\rangle$ takové, že

$$\underline{S}(f,D_2) > I-\varepsilon.$$

Nechť D je dělení, které zjemňuje D_1 i D_2.

Pak
$$I-\varepsilon < \underline{S}(f,D_2) \le \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D_1) < I+\varepsilon. \qquad (*)$$

pozn. výše

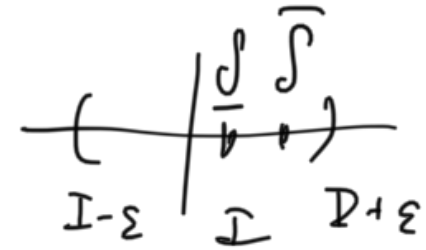
„$\Leftarrow$" Zvolme libovolné $\varepsilon>0$. Nechť dělení D splňuje $(*)$.

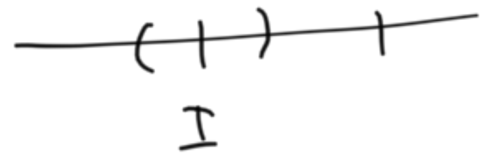
Pak
$$I-\varepsilon < \underline{S}(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D) < I+\varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0$:

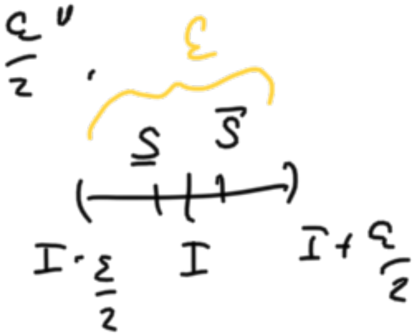
$$I-\varepsilon < \underline{\int_a^b} f < I+\varepsilon \quad \text{a} \quad I-\varepsilon < \overline{\int_a^b} f < I+\varepsilon .$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I .$$





(b) „$\Rightarrow$" Z (a) volbou „$\frac{\varepsilon}{2}$".



„$\Leftarrow$" Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a nechť D je dělení $\langle a,b\rangle$ takové, že

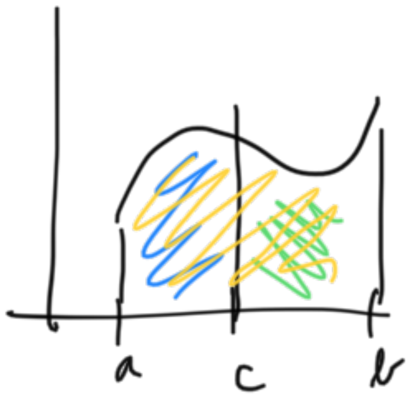
$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon .$$

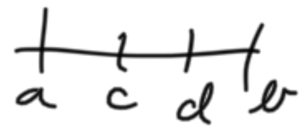
$\underline{S}(f,D) \le \underline{\int_a^b} f$

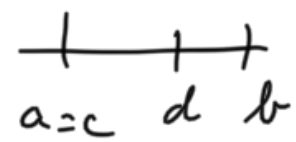
Pak $\quad \underbrace{0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f}_{} \le \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon .$

Protože to platí pro $\forall \varepsilon > 0$, je nutně $\overline{\int^b}$ $\int^b$

$\int_a f = \underline{\int}_a f$. □





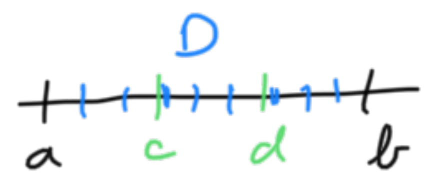


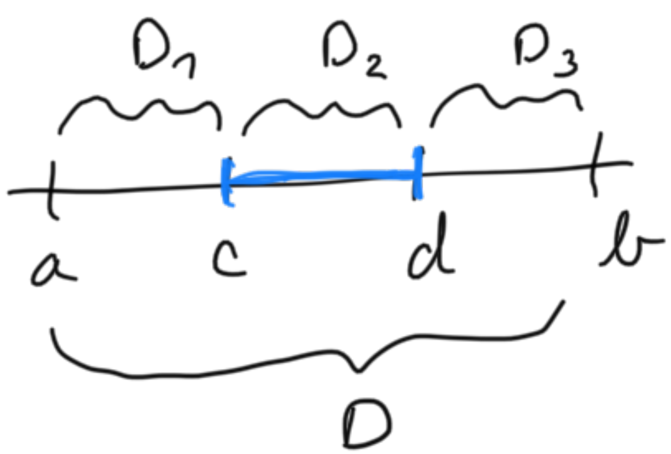
<u>Důkaz</u>: (i) Ukážeme případ $a<c<d<b$ (ostatní analogicky).

Zvolme $\varepsilon>0$ libovolné.

Dle LG5(b) $\exists$ dělení D int. $\langle a,b\rangle$ takové, že $\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)<\varepsilon$.

BÚNO D obsahuje body c i d.





D_1 ... dělení obsahující body D v int. $\langle a,c\rangle$
D_2 — " — $\langle c,d\rangle$
D_3 — " — $\langle d,b\rangle$

Zřejmě platí: $\overline{S}(f,D)=\overline{S}(f,D_1)+\boxed{\overline{S}(f,D_2)}+\overline{S}(f,D_3)$

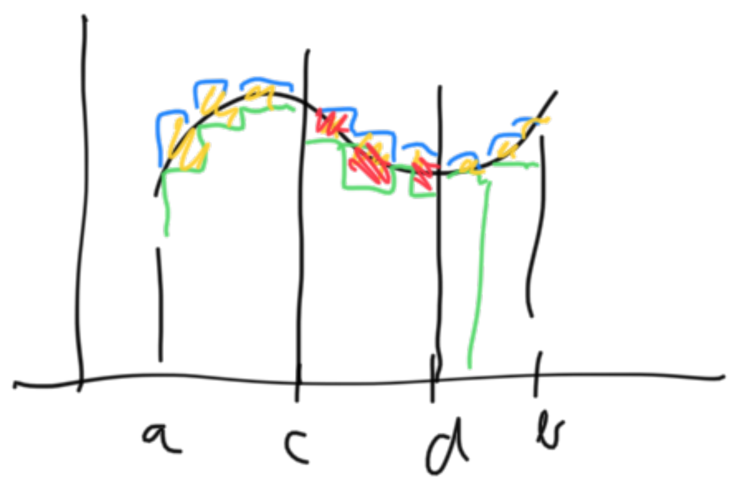
$$\underline{S}(f,D) = \underline{S}(f,D_1) + \boxed{\underline{S}(f,D_2)} + \underline{S}(f,D_3).$$

Tedy $0 \le \overline{S}(f,D_2) - \underline{S}(f,D_2) \le \overline{S}(f,D_2) - \underline{S}(f,D_2) + \overbrace{\overline{S}(f,D_1) - \underline{S}(f,D_1)}^{\ge 0} +$

$$+ \underbrace{\overline{S}(f,D_3) - \underline{S}(f,D_3)}_{\ge 0} =$$

$$= \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$$

$\overset{\text{LGS(b)}}{\Longrightarrow}$ $\int_c^d f$ existuje



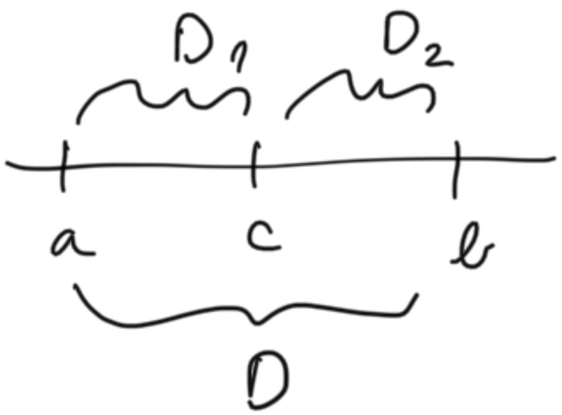
(ii) Označme $I_1 = \int_a^c f$, $I_2 = \int_c^b f$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. Dle LGS(a) $\exists$ dělení D_1 int. $\langle a, c\rangle$ takové, že

$$I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,D_1) \le \overline{S}(f,D_1) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

a $\exists$ dělení D_2 int. $\langle c,b\rangle$ takové, že

$$I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,D_2) \le \overline{S}(f,D_2) < I_2 + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$



Nechť D je dělení int. $\langle a,b\rangle$ vzniklé „sjednocením" D_1 a D_2.

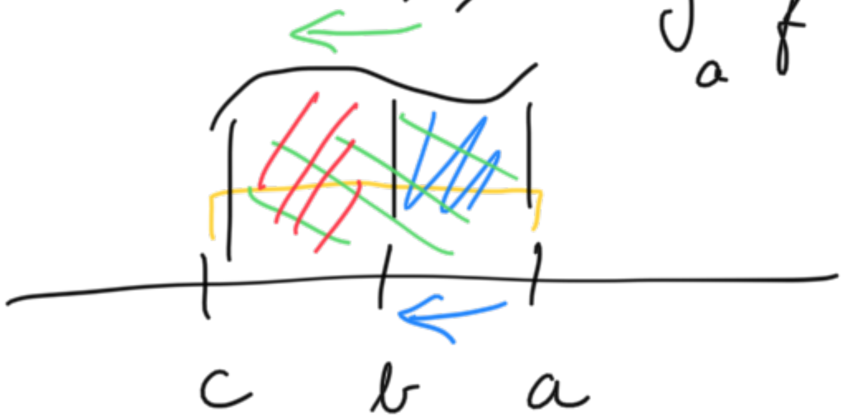
Pak $$\overline{S}(f,D) = \overline{S}(f,D_1) + \overline{S}(f,D_2) \text{ a}$$
$$\underline{S}(f,D) = \underline{S}(f,D_1) + \underline{S}(f,D_2).$$

Sečtením nerovností (2) a (3) dostáváme:

$$I_1 + I_2 - \varepsilon < \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) < I_1 + I_2 + \varepsilon.$$

LG5(a) $\Rightarrow$ $$\int_a^b f = I_1 + I_2.$$

$\square$

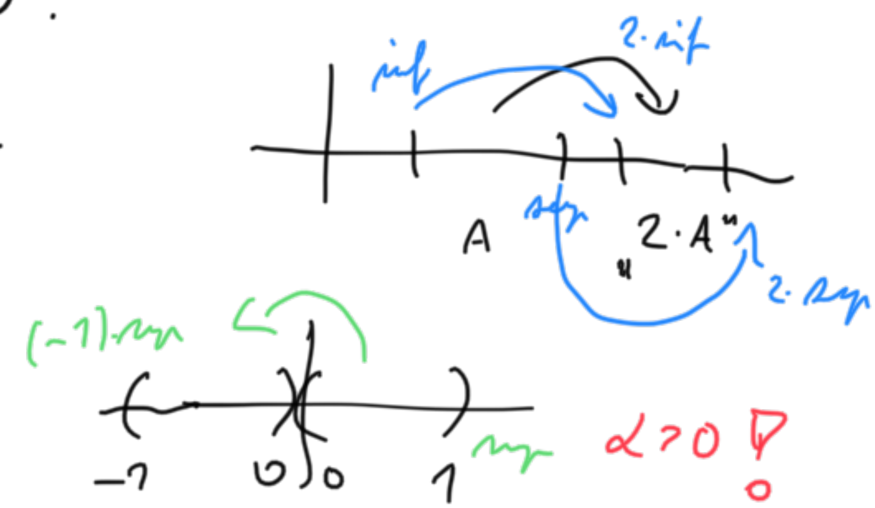


$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Tvr. A: Nechť $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná a $\alpha \geq 0$.

Pak $\sup\{\alpha x;\ x \in A\} = \alpha \cdot \sup A$ a

$\inf\{\alpha x,\ x \in A\} = \alpha \cdot \inf A$.



(i) $\forall x \in A$ je $x \leq \sup A \overset{\alpha \geq 0}{\Rightarrow} \alpha x \leq \alpha \cdot \sup A$,

tj. číslo $\alpha \cdot \sup A$ je horní závora $\{\alpha x,\ x \in A\}$

(ii) Nechť $r \in \mathbb{R}$, $r < \alpha \cdot \sup A$. Pak $\frac{r}{\alpha} < \sup A \Rightarrow \exists\, x \in A: x > \frac{r}{\alpha}$.

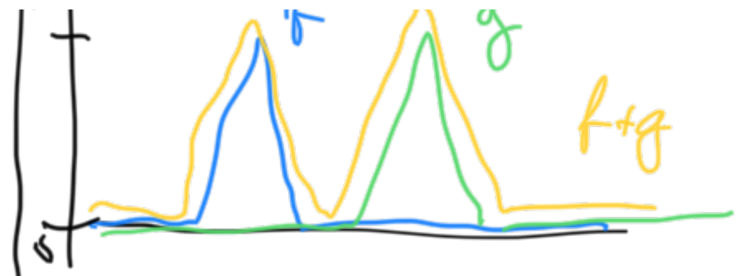
Odtud $\alpha x > r$.

Pro inf. analogicky.

Tvr. B: Nechť M je neprázdná množina a $f, g: M \to \mathbb{R}$. Pak

$\sup_M (f+g) \leq \sup_M f + \sup_M g$, | Pozor, nemusí platit rovnost:

$$\inf_M (f+g) \geq \inf_M f + \inf_M g .$$



$\sup_{\mathbb{R}} f = 1 = \sup_{\mathbb{R}} g$

$\sup_{\mathbb{R}} (f+g) = 1$

Zvolme libovolné $y \in M$.

Pak $f(y)+g(y) \leq \sup_M f + \sup_M g$.

Tedy číslo $\sup_M f + \sup_M g$ je horní závora množiny $\{f(y)+g(y);\, y \in M\}$.

Odtud již nerovnost plyne. Pro inf obdobně.