Střední hodnota diskrétního rozdělení

7.1.2013

1. V kapce máte jednu desetikoruny, dvě dvacetikoruny a jednu padesátikorunu. Zloděj Vám z kapsy náhodně vybere tři mince.
   (a) Spočítejte Vaši očekávanou ztrátu.
   (b) Spočítejte rozptyl Vaší ztráty.
   (c) Poté, co Vás zloděj okradl, se rozdělí se svým komplicem (spravedlivě) a následně si koupí lístek na tramvaj za 24 Kč. Spočítejte střední hodnotu a rozptyl peněz, které mu zbudou.

2. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Odvoďte rozdělení veličiny X. Jak se toto rozdělení nazývá? (Znáte ho z přednášky.)
   (b) Jaký je očekávaný počet správně zpodpovězených otázek?
   (c) Spočítejte vytvořující funkci tohoto rozdělení.
   (d) Pomocí vytvořující funkce spočtěte rozptyl správně zodpovězených otázek.

3. Cyril má na svazku 8 klíčů a snaží se odemknout dveře (ke kterým pasuje právě jeden klíč). Náhodně vybere klíč a vyzkouší ho. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče spadnou na zem a další klíč znovu volí zcela náhodně. Tak pokračuje, dokud konečně dveře neotevře.
   (a) Jaké je rozdělení počtu všech neúspěšných Cyrilových pokusů?
   (b) Jaký je očekávaný počet neúspěšných pokusů a očekávaný počet všech pokusů?

Opakování z přednášky

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $\mathsf{E}X = \int_\Omega X(\omega) d\mathsf{P}(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X.
- **Rozptyl** veličiny X je dán jako $\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$ (jestliže $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{E}X^2$ existují). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!
- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí
$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2 \mathsf{Var}\, X.$$
- Jestliže $X_1, \ldots, X_K$ jsou náhodné veličiny, pak
$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^K X_i\right) = \sum_{i=1}^K \mathsf{E}X_i.$$
Jsou-li veličiny nezávislé, pak i
$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^K X_i\right) = \sum_{i=1}^K \mathsf{Var}\, X_i.$$

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pstmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako
$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$
Rozptyl X spočteme
$$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = \sum_k x_k^2 \mathsf{P}(X = x_k) - \left(\sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k)\right)^2.$$
- Je-li X celočíselná náhodná veličina nabývající hodnot $0, 1, 2, \ldots$ s pravděpodobnostmi $p_0, p_1, p_2, \ldots$, pak definujeme **vytvořující funkci** P jako
$$P(t) = \mathsf{E}t^X = \sum_{k=0}^\infty t^k \mathsf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^\infty t^k p_k.$$
Potom platí
$$\mathsf{E}X = P'(1),$$
$$\mathsf{Var}\, X = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2,$$
(Případně bereme namísto $P'(1)$ limitu $P'(1-)$ apod).