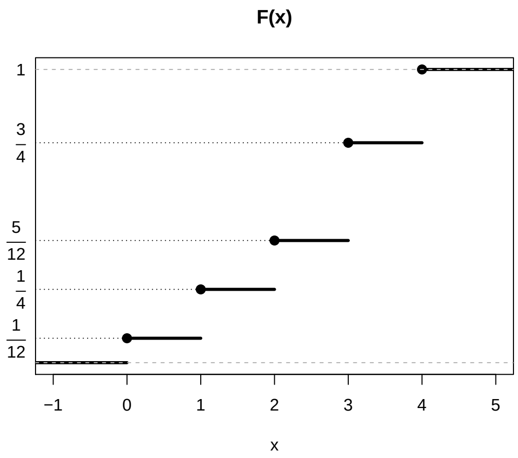
Distribuční a kvantilová funkce

26.11.2012

1. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození syna je stejná jako pravděpodobnost narození dcery.
   (a) Odvoďte rozdělení náhodné veličiny X. Jaký počet dcer je nepravděpodobnější?
   (b) Načrtněte a zapište distribuční funkci veličiny X. Připomeňte si základní vlastnosti distribuční funkce.
   (c) Nakreslete graf příslušné kvantilové funkce.

2. Počet studentů na výběrovém předmětu je náhodná veličina X s následující distribuční funkcí.



   Napište tabulku rozdělení veličiny X.
   S jakou pravděpodobností se bude výběrový předmět konat, jestliže je k tomu zapotřebí účast alespoň dvou studentů?

3. Doba čekání na autobus (v min.) je náhodná veličina s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x/2}, & x \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Zjistěte, s jakou pravděpodobností budeme na autobus čekat alespoň 2 minuty? S jakou pravděpodobností bude naše čekání mezi 1 a 5 min?
   (b) Spočítejte kvantilovou funkci a nakreslete její graf. Interpretujte hodnoty kvantilové funkce.

Doplnění k přednášce

4. Nechť X, Y jsou dvě (obecné) náhodné veličiny, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dokažte následující vztahy

$$\mathsf{Cov}\,(X, Y) = \mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y, \tag{1}$$

$$\mathsf{Cov}\,(aX + b, cY + d) = a \cdot c \cdot \mathsf{Cov}\,(X, Y). \tag{2}$$

5. Nechť X, Y jsou dvě (obecné) náhodné veličiny a ρ_{XY} jejich korelační koeficient. Dokažte, že platí

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

   a rovnost nastává právě tehdy, když $Y = aX + b$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{R}$ nebo je jedna z veličin konstantní.

Opakování

Distribuční funkce:

- Distribuční funkce náhodné veličiny X je definována jako

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

  a jednoznačně určuje rozdělení X.
- Pro diskrétní rozdělení je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k. Pro spojitou veličinu je distribuční funkce spojitá na $\mathbb{R}$.
- Distribuční funkce je vždy neklesající, zprava spojitá, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Kvantilová funkce:

- Kvantilová funkce F^{-1} náhodné veličiny X je definována jako

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$$

  pro $u \in (0, 1)$.
- Je-li F spojitá a rostoucí, pak se kvantilová funkce spočítá jako funkce inverzní k F.