Klasická pravděpodobnost a geometrická pravděpodobnost

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   (a) součet čísel na kostkách bude sudé číslo a zároveň součin čísel bude liché číslo,
   (b) součet bude sudé číslo nebo součin bude liché číslo?

2. Ze zaměstnanců firmy, ve které je 7 mužů a 4 ženy, je náhodně vybraná 6-členná delegace. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň dvě ženy?

3. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka, házíme-li
   (a) dvěma kostkami,
   (b) n kostkami.

4. Do vlaku s 10 vagóny nastoupilo 16 cestujících, kteří si vagón zvolili náhodně. Určete pravděpodobnost, že do každého vagónu nastoupil alespoň jeden cestující.

5. Máme n různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme právě na k-tý pokus, jestliže vždy
   (a) vyzkoušený klíč dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících,
   (b) vyzkoušený klíč necháme na svazku, klíči zatřeseme a náhodně vybereme jeden ze svazku.

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

6. Třikrát po sobě hodíme mincí a zaznamenáme výsledek. Označme rub jako R a líc jako L. Rozhodněte, zda jsou jevy $A = \{RRR, LRR, RLL, LLL\}$, $B = \{RRL, RLR, LLR, LLL\}$ a $C = \{RRL, RLR, LRL, LLL\}$ nezávislé.
7. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Své rozhodnutí vždy řádně zdůvodněte (uveďte důkaz nebo protipříklad).
   (a) Jestliže jsou jevy A, B nezávislé, pak o nezávislosti jevů A^C, B^C obecně neumíme rozhodnout.
   (b) Jestliže $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A) > 0$, pak $\mathsf{P}(B|A) \geq \mathsf{P}(B)$.
   (c) Existují A, B neslučitelné jevy, tj. $A \cap B = \emptyset$, takové, že $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ a A, B jsou nezávislé.
   (d) Jestliže platí $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B^C)$, pak jsou jevy A, B nezávislé.
   (e) Jestliže $\mathsf{P}(B) > 0$, pak $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A)$.
8. Náhodné jevy A, B, C jsou nezávislé. Určete $\mathsf{P}(A \cup B \cup C)$, jestliže $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = 0.1$.
9. Na startu dostihu jsou (mimo jiné) koně Albín a Bertík. Albín zvítězí s pravděpodobností 0.5, Bertík s pravděpodobností 0.3. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Bertík, jestliže se Albín zranil na startu a závod nepoběží?
10. V krabici je 15 tenisových míčků, z toho 9 úplně nových. Pro první hru si náhodně vybereme 3 míčky a po skončení hry je vrátíme zpátky. Pro druhou hru vybereme opět 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, jsou že všechny 3 míčky použité v druhé hře nové.

11. Slovo „humor“ se v americké angličtině píše jako HUMOR a v britské angličtině jako HUMOUR. Na zahradní slavnosti byly 2/3 Američanů a 1/3 Britů. Náhodně vybraný člověk napsal slovo humor (svým způsobem) a z tohoto slova bylo náhodně vybráno jedno písmeno. S jakou pravděpodobností byl daný člověk Brit, jestliže bylo vybráno písmeno "U"?
12. V truhle je neznámý počet mincí: jedna zlatá mince a náhodný počet stříbrných mincí, přičemž stříbrných mincí je právě k s pravděpodobností $\frac{e^{-1}}{k!}$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Náhodně vylosujeme jednu minci a ta je zlatá. Jaké je pravděpodobnost, že v truhle bylo právě k stříbrných mincí za této dodatečné informace?
13. Na stole leží dvě urny A a B: V urně A jsou dvě bílé a dvě černé kuličky a v urně B jsou dvě černé a jedna bílá kulička. Náhodně vybereme z každé urny jednu kuličku a z těchto dvou kuliček pak náhodně zvolíme jednu. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali bílou kuličku?
14. Ve sbírce 50 obrazů je 5 padělků. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 80%. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 5%. Určete
   (a) pravděpodobnost, že obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál,
   (b) pravděpodobnost, že obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek.
15. Přenášíme binární soubor, který obsahuje znaky "0" a "1". Pravděpodobnost, že se při přenosu zkreslí "0" je 1/4 a pravděpodobnost, že se zkreslí "1" je 1/6. Je známo, že přenášené znaky "0" a "1" se vyskytují v poměru 4:3. S jakou pravděpodobností se posloupnost o 6 znacích při přenosu nezkreslí, jestliže jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle?
16. Každý lékařský test je charakterizován svojí senzitivitou a specificitou, kde
   - senzitivita = pravděpodobnost pozitivního výsledku, je-li testovaná osoba nemocná,
   - specificita = pravděpodobnost negativního výsledku, je-li testovaná osoba zdravá.

   Pro test zjišťující přítomnost HIV viru v těle se uvádí senzitivita 99.9% a specificita 99.7%. Uvažujme hypotetickou populaci, ve které se vyskytuje 1% lidí s virem HIV.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba s pozitivním výsledkem testu skutečně HIV pozitivní?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba ve skutečnosti HIV pozitivní, dává-li test negativní výsledek?
   (c) U pozitivně testovaných jedinců se test provádí ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že je člověk skutečně HIV pozitivní, byl-li i druhým testem označen za HIV pozitivního?
17. Na stole jsou dvě kostky — růžová a bledě zelená. Růžová kostka je pravidelná devítistěnná kostka, bledě zelená je pravidelná dvanáctistěnná kostka.
   (a) Náhodně vybereme kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka? Jaká je pravděpodobnost, že padne jedenáctka?
   (b) Padla jednička, jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli růžovou kostkou?
   (c) Nyní předpokládejme, že děvčatům se více líbí růžová kostka, a tak si ji vyberou s pravděpodobností 4/5. Naopak, chlapci si vyberou bledě zelenou kostku s pravděpodobností 2/3.
      - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li chlapec?
      - Jaký je pravděpodobnost, že padne šestka, házela-li dívka?
      - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li náhodný student ze třídy, ve které je 10 chlapců a 5 dívek?

Náhodná veličina— diskrétní rozdělení

18. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, 3$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k^2 \quad k = 1, 2, 3$. Spočítejte konstantu c, distribuční funkci F a pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \geq 2)$.
19. Náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 0, 1, 2$, a to s pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{12}$ a $\mathsf{P}(X = 2) = a$. Určete konstantu a, tak aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení a nakreslete distr. funkci X.
20. V krabici je N čokoládových bonbónů, z nichž je K plněno karamelovou náplní. Vyberete si z krabice náhodně n bonbónů. Nechť X značí počet vytažených bonbónů s karamelovou náplní. Určete rozdělení X.