Diskrétní náhodná veličina

22.10.2012

1. Při přenosu binárního souboru se náhodně vybraný znak zkreslí s pravděpodobností $p = 3/14$ a jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle na sobě. Náhodná veličina X udává počet zkreslených znaků v binární posloupnosti délky n.
   (a) Určete očekávaný počet zkreslených znaků v posloupnosti délky n.
   (b) Spočtěte rozptyl veličiny X.
   (c) Jaká je očekávaná hodnota a rozptyl relativní četnosti nezkreslených znaků?

2. Z deseti milionu pixelů jsou v průměru dva vadné. Jaká je pravděpodobnost, že na obrazovce, která má $1280 \cdot 1024$ pixelů, bude alespoň jeden vadný pixel?

3. Vendelín má na svazku 8 klíčů a snaží se odemknout dveře (ke kterým pasuje právě jeden klíč). Náhodně vybere klíč a vyzkouší ho. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče spadnou na zem a další klíč znovu volí náhodně. Tak pokračuje, dokud konečně dveře neotevře.
   (a) Jaké je rozdělení počtu všech neúspěšných Vendelínových pokusů?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že Vendelín zaznamená nejvýše 6 neúspěšných pokusů?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že neodejde dříve než po desátém neúspěšném pokusu, má-li za sebou již šest neúspěšných?
   (d) Jaký je očekávaný počet neúspěšných pokusů?

4. Celkem n pánů si v šatně pánského klubu odložilo klobouk. Při hromadném odchodu z klubu dá šatnářka každému jeden náhodně vybraný klobouk.
   (a $\star$) Určete rozdělení počtu správně přiřazených klobouků a ověřte, že se jedná o pravděpodobnostní rozdělení. Jaká je limita tohoto rozdělení pro $n \to \infty$?
   (a) Určete očekávaný počet správně přiřazených klobouků.

5. Celkem n pánů si v šatně pánského klubu odložilo klobouk. Při hromadném odchodu z klubu postupně hledají své klobouky v šatně. Nejprve náhodně tahá první pán, dokud nenajde svůj klobouk. Až ho má, odchází a pokračuje druhý pán, po něm třetí atd., dokud nemá klobouk i poslední pán. Určete očekávaný počet všech tahů.

Opakování

Diskrétní náhodná veličina:

Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má diskrétní rozdělení.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako

$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$

- **Rozptyl** X se spočítá jako

$$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k\right)^2 \quad \text{(existuje-li)}.$$

- Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako

$$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k)\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k \quad \text{(existuje-li)},$$

  nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}Y = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y)$.

Užitečné vlastnosti

- **Momentová vytvořující funkce** veličiny X je funkce reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$ definovaná jako $\psi(t) = \mathsf{E}e^{tX}$ (existuje-li). Platí

$$\mathsf{E}X = \psi'(0), \quad \mathsf{Var}\, X = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2 \mathsf{Var}\, X.$$

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny, pak platí

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$