Bayesova věta, diskrétní náhodná veličina
15.10.2012

0. Polyovo urnové schéma: Krabice obsahuje a černých a b bílých koulí. Student v každém kroku náhodně vytáhne jednu kouli a vrátí ji zpět společně s d koulí téže barvy.
   – Jaká je pravděpodobnost, že mezi n taženými koulemi bude právě k bílých?
   – Jaká je pravděpodobnost, že v $n + 1$ tahu vytáhneme bílou kouli?

Bayesova věta

1. Z pošty doručené na server je 80 % spamů. Spamový filtr úspěšně rozpozná 90% všech spamů, ale zároveň 15 % korektní pošty je označeno jako spam.
   (a) Jaké je pravděpodobnost, že email smazaný filtrem jste si chtěli přečíst?
   (b) Jaké je procento spamů ve vaší schránce?
2. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?
3. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance, který byl jednou střelou trefen. Určete pravděpodobnost toho, že kance zastřelil první, druhý nebo třetí střelec, jsou-li pravděpodobnosti zásahu po řadě rovny 0.2, 0.4 nebo 0.6.

Diskrétní náhodná veličina

4. V peněžence máte dvě pětistovky, jednu tisícikorunu a jednu dvoutisícovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X.
   (b) Spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (c) Spočtěte rozptyl veličiny X.
   (d) Nakreslete distribuční funkci veličiny X. Jaké jsou obecné vlastnosti distribuční funkce?
5. Při přenosu binárního souboru se náhodně vybraný znak zkreslí s pravděpodobností $p = 3/14$ a jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle na sobě. Náhodná veličina X udává počet zkreslených znaků v binární posloupnosti délky n.
   (a) Jaké je rozdělení X?
   (b) Určete očekávaný počet zkreslených znaků v posloupnosti délky n.
   (c) Spočtěte rozptyl veličiny X.

Opakování

Bayesova věta:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Náhodná veličina: **Náhodná veličina** X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Jednotlivým prvkům $\omega \in \Omega$ tedy přiřazuje reálná čísla $X(\omega)$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X
  - popisuje pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ pro všechny množiny $B \in \mathcal{B}$,
  - je jednoznačně určeno **distribuční funkcí**, která je funkcí reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ a je definovaná jako
  $$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x).$$
- Základní charakteristiky veličiny X jsou
  - **střední hodnota** $\mathsf{E}X$, která vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X,
  - **rozptyl** veličiny X, který popisuje její variabilitu kolem $\mathsf{E}X$. Rozptyl je definovaný jako
  $$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$
  a je to vždy **nezáporné** číslo!

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \dots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako

$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$