Výsledky příkladů ze cvičení

Poslední úprava: 20. listopadu 2012

Cvičení 1: Klasická pravděpodobnost

1. 4 kostky:
   (a) $5/18$
   (b) $1/16$
   (c) $10/6^4$
   (d) $1-5/6^4$
   (e) $1-(5/6)^4$
2. rum: a) $3/10$ b) $5/6$
3. sekretářkaka:
   (a) $1-1/2+1/3!-\cdots+(-1)^n 1/n! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} 1/k! = 1-\sum_{k=0}^n (-1)^k/k!$
   (b) $\sum_{k=1}^n (-1)^k/k! \to 1-\mathrm{e}^{-1}$ pro $n\to\infty$
4. studenti na cvičení (Maxwellovo-Boltzmanovo schéma)
   (a) $\mathsf{P}(A_k)=\binom{r}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$ pro $k=0,1,\dots,r$ a $\mathsf{P}(A_k)=0$ pro $k>r$
   (b) $\mathsf{P}(B)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^r$ pro $r\geq n$ a $\mathsf{P}(C)=0$ pro $r<n$
   (c) $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k=0,1,2,\dots$
5. peníze do obálek (Boseovo-Einsteinovo schéma)
   (a) $\mathsf{P}(A_k)=\frac{\binom{n+r-k-2}{r-k}}{\binom{n+r-1}{r}}=\frac{r!(n+r-2-k)!(n-1)}{(r-k)!(n+r-1)!}$ pro $k=0,1,\dots,r$ a $\mathsf{P}(A_k)=0$ pro $k>r$
   (b) $\mathsf{P}(C)=\frac{(r-1)!r!}{(n+r-1)!(r-n)!}$ pro $r\geq n$ a $\mathsf{P}(C)=0$ pro $r<n$
   (c) $\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}$ pro $k=0,1,\dots$
6. $1/n$

Cvičení 2: Vlastnosti pravděpodobnosti

1. $11/36$
2. jedině pokud $\mathsf{P}(A)=0$ nebo $\mathsf{P}(B)=0$
3. a) 0.1 b) $2/3$ c) nejsou
4. jsou po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé
5. $3/80$
6. $(11/14)^6$
7. a) $b/(a+b)$ v obou případech (b) $b/(a+b)$

Cvičení 3: Bayesova věta, náhodná veličina

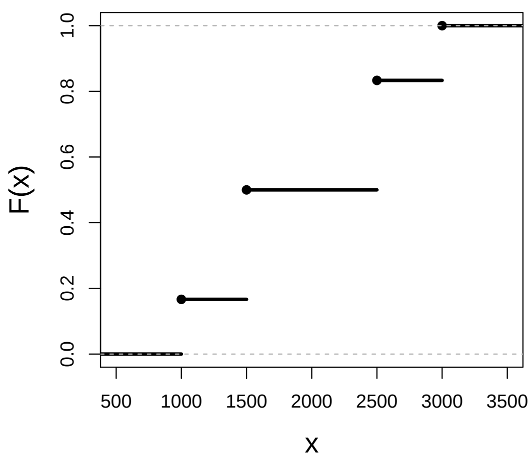
1. a) 3/75, b) 8/25

2. 2/3

3. 3/29, 8/29, 18/29

4. zloděj:

   (a) rozdělení X: $\mathsf{P}(X = 1000) = 1/6$, $\mathsf{P}(X = 1500) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 2500) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 3000) = 1/6$;
   (b) očekávaná ztráta $\mathsf{E}X = 2000$;
   (c) $\mathsf{Var}\, X = 5 \cdot 10^5$,
   (d) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1000, \\ 1/6, & x \in [1000, 1500), \\ 1/2, & x \in [1500, 2500), \\ 5/6, & x \in [2500, 3000), \\ 1, & x \geq 3000. \end{cases}$



5. a) binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(n, 3/14)$, tj. $\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k}(3/14)^k(11/14)^{n-k}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$, b) $\mathsf{E}X = n \cdot 3/14$, c)$\mathsf{Var}\, X = n \cdot 3/14 \cdot 11/14$.

Cvičení 4: Diskrétní náhodná veličina

1. a) $\mathsf{E}X = np = n \cdot 3/14$ (různé možnosti výpočtu: z definice, pomocí momentové vytvořující funkce nebo přes 0-1 veličiny)
   b) $\mathsf{Var}\, X = np(1-p) = n\frac{33}{14^2}$
   c) relativní četnost nezkreslených znaků je $Y = \frac{n-X}{n} = 1 - \frac{X}{n}$, proto $\mathsf{E}Y = 1 - p = 11/14$ a $\mathsf{Var}\, X = p(1-p)/n = \frac{1}{n} \cdot \frac{33}{14^2}$.

2. výpočet přes binomické rozdělení: $\mathsf{P}(X \geq 1) = 1 - (1 - 2 \cdot 10^{-7})^{1.3 \cdot 10^6} = 0.23$
   výpočet přes Poissonovo rozdělení: $\mathsf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-0.26} = 0.23$

3. (a) $\mathsf{P}(X = k) = (1-p)^k \cdot p = \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot \frac{1}{8}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$ geometrické rozdělení
   (b) $\mathsf{P}(X \leq 6) = 1 - (1-p)^7 = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^7$
   (c) $\mathsf{P}(X \geq 10 | X \geq 6) = (1-p)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \mathsf{P}(X \geq 4)$, tj. geometrické rozdělení má tzv. zapomínací schopnost
   (d) očekávaný počet všech neúspěšných pokusů je $\mathsf{E}X = 1/p - 1 = 7$

4. (a) $\mathsf{P}(X = k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$ pro $k = 0, \dots, n$ (b) pro výpočet střední hodnoty není nutné znát rozdělení X: použijeme skutečnost, že $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i = 1$, pokud je i-tý klobouk přiřazen správně a $X_i = 0$ jinak. Pak $\mathsf{E}X_i = 1/n$ a tedy $\mathsf{E}X = n \cdot 1/n = 1$

5. Počet tahů je součet geometrických rozdělení, proto $\mathsf{E}X = n + (n-1) + \dots + 1 = n(n+1)/2$.

Cvičení 5: Spojitá náhodná veličina

1. Dítě:
   (a)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/3, & x \in [0, 3], \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$
   (b) $\mathsf{P}(X = 1) = 0$, $\mathsf{P}(X \geq 1) = 2/3$, $\mathsf{P}(1/2 < X < 2) = 1/2$
   (c) $\mathsf{E}X = 3/2$
   (d) $\mathsf{Var}\, X = 3/4$
   (e) $\mathsf{P}(X > 2 | X > 1) = 1/2$

2. Telefonní hovor:
   (a) $c = 1/5$
   (b) $\mathsf{E}X = 5$ minut
   (c) $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $F(x) = 0$ pro $x < 0$
   (d) $\mathsf{P}(X > 10) = \mathrm{e}^{-2}$
   (e) $\mathsf{P}(X \geq 10 | X \geq 5) = \mathrm{e}^{-1} = \mathsf{P}(X \geq 5)$
   (f) $\mathsf{Var}\, X = 25$
   (g) $Y = 1 + 3X$, distr. fce Y je $G(y) = 1 - \exp\{-\frac{y-1}{3}\}$ pro $y \geq 1$ a $G(y) = 0$ pro $y < 1$
   (h) $\mathsf{E}Y = 16$ Kč, $\mathsf{Var}\, Y = 9 \cdot 25 = 225$

3. Pes:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \dfrac{\left(a - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{a^2}, & x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}a], \\ 1, & x > \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$
   hustota $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \dfrac{a - \frac{2}{\sqrt{3}}x}{a^2}$ pro $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}a]$ a $f(x) = 0$ jinak
   střední hodnota $\mathsf{E}X = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Cvičení 6: Náhodné vektory

1.(a) sdružené rozdělení

	Y		
X	0	1	2
0	0	0	1/8
1	0	2/8	1/8
2	1/8	2/8	0
3	1/8	0	0

(b) marginalni rozd. X

$$\mathsf{P}(X=0)=\frac{1}{8}=\mathsf{P}(X=3),\quad \mathsf{P}(X=1)=\frac{3}{8}=\mathsf{P}(X=2),$$

marginalni rozd. Y

$$\mathsf{P}(Y=0)=\frac{1}{4}=\mathsf{P}(Y=2),\quad \mathsf{P}(Y=1)=\frac{1}{2}.$$

(c) nejsou, jsou závislé

(d) $\mathsf{Cov}\,(X,Y)=-\frac{1}{2}$

(e) korelace $\rho_{XY}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

2.(a) marg. hustoty

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0,\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y\ge 0,\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

(b) $\mathsf{Cov}\,(X,Y)=0$

(c) jsou nezávislé

(d) $\mathsf{E}(X+Y)=3$

3. $\mathsf{Cov}\,(X,Y)=0=\rho_{XY}$, ale veličiny jsou závislé

4.(a) $\mathsf{E}X_i=1/n$, $\mathsf{Var}\,X_i=(n-1)/n^2$

(b) nejsou

(c) $\mathsf{Cov}\,(X_i,X_j)=1/[n^2(n-1)]$

(d) $\mathsf{E}X=1$, $\mathsf{Var}\,X=1$

Cvičení 7: Kvantilová funkce, transformace a součtu náhodných veličin

1. (a) $F^{-1}(u)=-2\ln(1-u)$, (b) medián $F^{-1}(1/2)=2\ln 2<\mathsf{E}X=2$

2.(a) distr. funkce

$$G(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{36\pi}y}, & 0\le y\le 36\pi,\\ 1, & y>36\pi.\end{cases}$$

(b) hustota:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{36\pi y^2}}, & 0 \leq y \leq 36\pi, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

3. Z má rozdělení s distr. funkcí F, tj. rozdělení z příkladu 1.

4. hustota $Z = X + Y$:

$$g(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-z/2}(1 - \mathrm{e}^{-z/2}), & z \geq 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

5. (a) $Z = X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem 15, (b) podmíněné pravděpodobnosti odpovídají binomickému rozdělení $\mathsf{Bi}(n, 1/3)$

6. maximum za týden, tj. veličina $M = \max_{1 \leq i \leq 7} X_i$ má distribuční funkci

$$G(x) = F(x)^7 = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-x/2})^7, & x \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Cvičení 8: Normální rozdělení, Čebyševova nerovnost

1. (a) $1 - \Phi(2.17) = 0.015$
   (b) $\Phi(0.61) + \Phi(0.95) - 1 = 0.554$
   (c) $1 - \Phi(2.52) + 1 - \Phi(2.17) = 0.021$
   (d) pravidlo dvou sigma: $\mathsf{P}(123.3 \leq X \leq 148.9) = 0.95$,
   pravidlo tří sigma: $\mathsf{P}(116.9 \leq X \leq 155.3) = 0.997$,
   (e) alespoň 146.6 cm
   (f) maximálně 127.9 cm

2. (a) $\mathsf{P}(|X - \mu| > 2\sigma) = 0.05$ z pravidla dvou sigma
   Čeb. nerovnost dává $\mathsf{P}(|X - \mu| > 2\sigma) \leq 1/4 = 0.25$
   (b) $\mathsf{P}(|X - \mu| > 3\sigma) = 0.003$ z pravidla tří sigma
   Čeb. nerovnost dává $\mathsf{P}(|X - \mu| > 3\sigma) \leq 1/9 = 0.11$

3. (a) $\mathsf{E}\nu_n = 1/2$, $\mathsf{Var}\,\nu_n = 1/(4n)$
   (b) ν_n konverguje k $1/2$ v pravděpodobnosti (plyne ze slabého zákona velkých čísel)
   (c) $\mathsf{P}(|\nu_n - 1/2| > 0.1) = 0.25$
   (d) je potřeba $n \geq 500$ hodů