Nezávislost, náhodná veličina

16.10.2019

1. Student, který se na zápočtovou písemku z Pravděpodobnosti a statistiky učil, ji úspěšně napíše s pravděpodobností 0,8. Naopak student, který se neučil, uspěje s pravděpodobností 0,1. Spočtěte, s jakou pravděpodobností se student, který napsal úspěšně písemku, učil, pokud studenti, kteří se svědomitě připravují tvoří
   (a) dvě třetiny všech studentů,
   (b) desetinu všech studentů.

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý].
   (a) Určete podmíněnou pravděpodobnost jevu A, když víme, že nastal jev C.
   (b) Jsou jevy A,B a C po dvou nezávislé?
   (c) Jsou jevy A,B,C nezávislé?

3. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance. Pravděpodobnosti zásahu jsou po řadě rovny 0,2, 0,4 a 0,6 a lovci střílí nezávisle na sobě.
   (a) S jakou pravděpodobností kance zastřelil první střelec, byl-li kanec zasažen jedinou střelou?
   (b) Nechť náhodná veličina X udává počet střel, které zasáhly kance. Určete rozdělení X a nakreslete distribuční funkci.

4. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Odvoďte rozdělení veličiny X a načrtněte graf distribuční funkce.
   (b) Za každou správnou odpověď dostane student 2 body a za špatnou naopak 2 body ztratí. Určete pro $n = 10$ rozdělení náhodné veličiny Y, která udává celkový počet bodů studenta.

5. Adam hází opakovaně na basketbalový koš, dokud se netrefí. V každém hodu se trefí s pravděpodobností 0.2, a to nezávisle na svých předchozích výsledcích.
   (a) Nechť náhodná veličina X udává celkový počet hodů na koš. Určete rozdělení této náhodné veličiny.
   (b) S jakou pravděpodobností hodí Adam více než pětkrát?
   (c) S jakou pravděpodobností hodí Adam více než desetkrát, když se ani pátým pokusem netrefil?

6. Nyní se v házení na koš střídají Adam a Bedřich. Adam se v každém svém pokusu trefí s pravděpodobností 0,2 a Bedřich s pravděpodobností 0,3, a to nezávisle na svých předchozích výsledcích a výsledcích protihráče. Hra končí ve chvíli, kdy padne první koš.
   (a) Náhodná veličina X udává celkový počet hodů na koš. Určete její rozdělení.
   (b) Je pravděpodobnější, že vyhraje celou hru Adam nebo Bedřich?

Opakování

Bayesova věta: Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathsf{P}(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Náhodná veličina: **Náhodná veličina** X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Jednotlivým prvkům $\omega \in \Omega$ tedy přiřazuje reálná čísla $X(\omega)$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X
  - popisuje pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ pro všechny množiny $B \in \mathcal{B}$,
  - je jednoznačně určeno **distribuční funkcí**, která je funkcí reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ a je definovaná jako
  $$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x).$$
  Distribuční funkce je vždy neklesající, zprava spojitá s limitou 0 v $-\infty$ a limitou 1 v ∞.
  - Platí $\mathsf{P}(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ pro libovolné $a < b$.

- Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \dots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.
  - Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
  - **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.