Výsledky příkladů na procvičení

Poslední úprava: 4. října 2019

1. kostky: (a) 1/16 (b) 1/2
2. firma: 371/462
3. alespoň jedna šestka a) 11/36, b) $1-(5/6)^n$
4. vlak $\sum_{k=0}^{9}\binom{10}{k}\left(\frac{10-k}{10}\right)^{16}(-1)^k$
5. klíče: (a) $1/n$ (b) $(1-1/n)^{k-1}\cdot 1/n$
6. rum: a) 3/10, b) 5/6
7. jevy jsou závislé
8. (a) neplatí, A^C a B^C jsou nezávislé,
   (b) platí
   (c) neplatí
   (d) platí
   (e) neplatí
9. $1-0.9^3$
10. dostihy: 0.6
11. tenistka: a) $2/25=0.08$, b) $8/23=0.3478261$
12. profesor: $\dfrac{3^3}{4^4-3^4}=\dfrac{27}{175}$
13. studenti: (a) 28/45 (b) ze skupiny B (c) $1-(0.2)^3(0.4)^4(0.6)^2$
14. mandarinky 15/400
15. krabice: $n/(m+n)$ (viz Polyovo urnové schéma)
16. krabice s míčky: $528/5915=0.089$
17. HUMOR: 5/11
18. spam: a) 3/75, b) 8/25
19. truhly 2/3
20. lovci 3/29, 8/29, 18/29
21. mince: $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)(k+1)!}$ pro $k=0,1,2,\ldots$
22. bílá kulička 5/12

23. Dvojčata: $\frac{2p}{1+p-q}$

24. Buchty: $\dfrac{\frac{b_k}{a_k+b_k}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{a_i+b_i}}$

25. obrazy: (a) 0.977 (b) 0.64

26. 5 nebo 7: 2/5

27. HIV test: (a) 0.77, (b) 10^{-5}, (c) 0.999

28. kostky: (a) $\mathsf{P}(\text{“6”}) = 7/72$, $\mathsf{P}(\text{“11”}) = 1/24$,
    (b) 4/7
    (c) $\mathsf{P}(\text{“6”}|\text{chlapec}) = 5/54$, $\mathsf{P}(\text{“6”}|\text{dívka}) = 19/180$, $\mathsf{P}(\text{“6”}) = 157/1620$

29. $c = 1/14$, $\mathsf{E}X = \frac{18}{7}$, $\mathsf{Var}\, X = \frac{19}{49}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ \dfrac{1}{14} & x \in [1,2), \\ \dfrac{5}{14} & x \in [2,3), \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

    $\mathsf{P}(X \geq 2) = \frac{13}{14}$.
    Rozdělení Y: $\mathsf{P}(Y = 0) = 4/14 = 2/7$ a $\mathsf{P}(Y = 1) = 1/14 + 9/14 = 10/14 = 5/7$, tj. Y má alternativní rozdělení $\mathrm{A}(p)$ s parametrem $p = 5/7$; $\mathsf{E}Y == \frac{5}{7}$

30. $a = 1/4$, $\mathsf{E}X = 5/12$, $\mathsf{Var}\, X = 155/144$, rozdělení Y: $\mathsf{P}(Y = 0) = 1/2$, $\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(Y = 4) = 1/4$, $\mathsf{E}Y = 5/4$

31. basketbalista: $\mathsf{P}(X = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$

32. (a)

$$\mathsf{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{pro } \max\{0, K-N+n\} \leq k \leq \min\{K, n\}$$

    (b) $\mathsf{E}X = n\frac{K}{N}$
    (c) $\mathsf{Var}\, X = n\frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$

33. $c = 1/(\mathrm{e} - 1)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}, & x \in [0,1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

    $\mathsf{E}X = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$, $\mathsf{Var}\, X = \frac{\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e} + 1}{(\mathrm{e}-1)^2}$

34. krychle $\mathsf{E}V = a^3/4$, $\mathsf{Var}\, V = 9/112 \cdot a^6$

35. (a) Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$,
    (b) $\mathsf{E}Z = 3/2$, $\mathsf{Var}\, Z = 3/4$

36. (a) distr. funkce Y:

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \sqrt{y}/\pi, & y \in [0, \pi^2], \\ 1 & y > \pi^2 \end{cases}$$

    hustota: $g(y) = 1/[2\pi\sqrt{y}]I[y \in [0, \pi^2]]$, $\mathsf{E}Y = \pi^2/3$
    (b) $\mathsf{E}Z = 2/\pi$

37. (a) $c = 1/2$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2), & 0 \le x \le \pi, \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

    (b) $\mathsf{E}X = \pi/2 =$ medián X (plyne ihned ze symetrie hustoty)
    (c) $F^{-1}(u) = \arccos(1 - 2u)$, $u \in (0, 1)$

38. trojúhleník:
    (a) 0
    (b) rozdělení je rovnoměrné na intervalu $(0, \pi/2)$; hledaná pravděpodobnost je 1/3
    (c) distribuční funkce a hustota:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{2}{\pi}\text{arcsin}y, & y \in (0, 1), \\ 1, & y \ge 1, \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, & y \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

    $\mathsf{P}(a > 1/2) = 2/3$
    (d) $\mathsf{E}a = \dfrac{2}{\pi}$, $\mathsf{Var}\, a = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \dfrac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$,
    (e) $\mathsf{E}S = \dfrac{1}{2\pi}$.

39. bublina: $\mathsf{E}V = 9\pi$, $\mathsf{Var}\, V = \pi^2 3^6/7$.

40. hody mincí
    (a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
	0	0	1/8	1/8
X	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

(b) marginální rozdělení: $\mathsf{P}(X=0)=1/4$, $\mathsf{P}(X=1)=1/2$, $\mathsf{P}(X=2)=1/4$, totéž pro Y, veličiny jsou závislé

(c) $\mathsf{Cov}\,(X,Y)=-1/4$, $\rho_{XY}=-1/2$

41. klobouky:

 (a) X_i má alternativní rozdělení $\mathsf{P}(X_i=1)=1/n$, proto $\mathsf{E}X_i=1/n$, $\mathsf{Var}\,X_i=(n-1)/n^2$

 (b) jsou závislé: $\mathsf{P}(X_i=1,X_j=1)=\frac{1}{n(n-1)}\neq\mathsf{P}(X_i=1)\mathsf{P}(X_j=1)=\frac{1}{n^2}$,

 (c) kovariance je $\frac{1}{n^2(n-1)}$,

 (d) $\mathsf{E}X=1$, $\mathsf{Var}\,X=1$

42. (a) $c=4$,

 (b) $f_X(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}I[x\geq 0]$, $f_Y(y)=2y\mathrm{e}^{-y^2}I[y\geq 0]$, X a Y jsou nezávislé

 (c) $\mathsf{E}(X^2+Y^2)=2$

43. maximum a minimum:

 (a) $F_U(u)=[F(u)]^n$, $f_U(u)=n[F(u)]^{n-1}f(u)$

 (b) $F_V(v)=1-[1-F(v)]^n$, $f_V(v)=n[1-F(v)]^{n-1}f(v)$

 (c) $\mathsf{E}U=n/(n+1)$, $\mathsf{Var}\,U=n/[(n+1)^2(n+2)]$, $\mathsf{E}V=1/(n+1)$, $\mathsf{Var}\,V=n/[(n+1)^2(n+2)]$

44. $\mathsf{Cov}\,(H,D)=1/36$, jsou závislé

45. (a) $\widehat{\theta}=2\overline{X}_n$, (b) odhad je nestranný a konzistentní,

46. (a) $\widehat{\lambda}=\overline{X}_n$, (b) odhad je nestranný a konzistentní,
 (c) je-li $p_0:=\mathsf{P}(X_i=0)=e^{-\lambda}$, pak jeden odhad je $\widehat{p_0}=e^{-\overline{X}_n}$, druhý je $\widetilde{p_0}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{I}[X_i=0]$.
 Pak oba odhady jsou konzistentní, $\tilde{p}$ je i nestranný.

47. (a) X_i mají diskrétní rovnoměrné rozdělení, tj. $\mathsf{P}(X_i=k)=1/N$ pro $k=1,\ldots,N$ a tedy $\mathsf{E}X_i=\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}=\frac{N+1}{2}$.
 (b) $\widehat{N}=2\overline{X}_n-1$, (c) odhad je nestranný a konzistentní.

48. (a) platí $\int_0^{\sqrt{2a}}f(x)=1$, (b) $\widehat{a}=\frac{9}{8}(\overline{X}_n)^2$, (c) ano je konzistentní.

49. bankomat: alespoň 10230

50. kostka: 0.921

51. hostina: nejvýše 45 hostů

52. konzultace: 0.013

53. terč: 0.993075