Náhodná veličina a její momenty

7.11.2018

1. V kapse máte dvě padesátikoruny, jednu dvacetikorunu a jednu desetikorunu. Zloděj Vám z kapsy náhodně vybere dvě mince. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X a spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (b) Určete rozptyl X.
   (c) Zloděj si následně koupí kávu z automatu za 20 Kč a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a očekávanou hodnotu Y.
   (d) Určete rozptyl veličiny Y. Jaký je vztah mezi momenty X a momenty Y?

2. Poloměr bubliny vyfouknuté z bublifuku je náhodná veličina R s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 5]$ cm.
   (a) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl poloměru bubliny R.
   (b) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl objemu bubliny $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Při přenosu binárního souboru se náhodně vybraný znak zkreslí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ a jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle na sobě. Náhodná veličina X udává počet zkreslených znaků v binární posloupnosti délky n.
   (a) Připomeňte si, jaké rozdělení má X.
   (b) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl X pro $n = 1$.
   (c) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl X pro $n = 2$.
   (d) Určete očekávaný počet zkreslených znaků v posloupnosti délky n.
   (e) Spočtěte rozptyl veličiny X pro obecné n.

4. Doba čekání na vlak je náhodná veličina X s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = 1/5 \cdot e^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ pro $x < 0$.
   (a) Spočtěte střední hodnotu X.
   (b) Spočtěte rozptyl X.

5. Počet vadných pixelů na obrazovce je náhodná veličina X, která se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tj. platí

$$\mathsf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

   (a) Ověřte, že se skutečně jedná o pravděpodobnostní rozdělení.
   (b) Spočtěte očekávaný počet vadných pixelů na obrazovce.
   (c) Spočtěte rozptyl X.

Opakování

Charakteristiky náhodných veličin: Základní charakteristiky náhodné veličiny X jsou:

– **Střední hodnota** $\mathsf{E}X$, která vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X.

- V případě diskrétního rozdělení ji spočítáme jako

$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$

- V případě spojitého rozdělení ji spočteme jako

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{(existuje-li)}.$$

– **Rozptyl** veličiny X, který popisuje její variabilitu kolem $\mathsf{E}X$. Rozptyl je definovaný jako

$$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$

a je to vždy **nezáporné** číslo!

– Při výpočtech nás může zajímat $\mathsf{E}h(X)$. Tu spočteme z rozdělení X následovně:

- pro diskrétní: $\mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k)\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k \quad$ (existuje-li),
- pro spojité: $\mathsf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx \quad$ (existuje-li).

Vlastnosti

– Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\,\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2\,\mathsf{Var}\, X.$$