Věta o úplné pravděpodobnosti, Bayesova věta

10.10.2018

1. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1.kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?
2. Z pošty doručené na server je 80 % spamů. Spamový filtr úspěšně rozpozná 90% všech spamů, ale zároveň 15 % korektní pošty je označeno jako spam.
   (a) S jakou pravděpodobností je náhodně vybraný email označený jako spam?
   (b) Jaké je pravděpodobnost, že email označený jako spam jste si chtěli přečíst?
   (c) Kolik procent z emailů, které filtrem nejsou označeny jako spam, tvoří spamy?
3. Přenášíme binární soubor, který obsahuje znaky "0" a "1". Pravděpodobnost, že se při přenosu zkreslí "0" je 1/4 a pravděpodobnost, že se zkreslí "1" je 1/6. Je známo, že přenášené znaky "0" a "1" se vyskytují v poměru 4:3.
   (a) S jakou pravděpodobností se přenášený znak zkreslí?
   (b) Obdrželi jsme znak "0". Jaká je pravděpodobnost, že jsme obdrželi nezkreslený znak, tj. že byla "0" opravdu vyslána?
4. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?
5. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \dots$. Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu.
   (a) Je pravděpodobnější, že odměnu dostaneme nebo že odměnu nedostaneme?
   (b) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?
6. V krabici máme b bílých a a černých koulí. Postupně je taháme ven bez vracení.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli v prvním tahu? A ve druhém?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že $(n + 1)$-ní tažená koule bude bílá?
7. Házíme dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?

Opakování

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:

Jestliže náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ splňují $\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak

$$\mathsf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathsf{P}(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot \mathsf{P}(A_{n-1}| \cap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \dots \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_1).$$