Náhodná veličina a její momenty

31.10.2017

1. V peněžence máte dvě pětistovky, jednu tisícikorunu a jednu dvoutisícovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X.
   (b) Spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (c) Spočtěte rozptyl veličiny X.
   (d) Zloděj následně zaplatí 1000 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení Y.
   (e) Určete očekávanou hodnotu a rozptyl veličiny Y.
   (f) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit jedno pivo za 21 Kč?

2. Metro odjíždí ze stanice Florenc v zcela pravidelných intervalech každých 5 minut. Vy v náhodnou chvíli dorazíte na stanici a náhodná veličina X udává, jak dlouho budete čekat na odjezd metra.
   (a) Jaké rozdělení lze pro X předpokládat?
   (b) Spočtěte očekávanou dobu čekání.
   (c) Určete rozptyl.
   (d) Pět dní po sobě takto čekáte na metro. Jaká je pravděpodobnost, že chodíte na zastávku v ideální dobu a nikdy jste nečekali déle než 1 minutu?

   Během čekání na metro si projíždíte internet na mobilu, přičemž Vám za to Váš operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč a pak spojitou sazbu 3Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte.

   (e) Spočtěte očekávanou částku a její rozptyl.
   (f) Určete také rozdělení Y.

3. Při přenosu binárního souboru se náhodně vybraný znak zkreslí s pravděpodobností $p = 3/14$ a jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle na sobě. Náhodná veličina X udává počet zkreslených znaků v binární posloupnosti délky n.
   (a) Určete očekávaný počet zkreslených znaků v posloupnosti délky n.
   (b) Spočtěte rozptyl veličiny X.

4. (Viz minulá hodina.) Doba čekání na vlak je náhodná veličina X s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = 1/5 \cdot e^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ pro $x < 0$.
   (a) Spočtěte střední hodnotu X.
   (b) Na vlak čekáte již 2 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že budete čekat více než 5 min?

5. Předpokládejme, že počet vadných pixelů na obrazovce se řídí Poissonovým rozdělním s parametrem $\lambda = 0.4$.
   (a) Spočtěte očekávaný počet vadných pixelů na obrazovce.
   (b) S jakou pravděpodobností budeme mít obrazovku bez závady?

Opakování

Charakteristiky náhodných veličin: Základní charakteristiky náhodné veličiny X jsou:
– **Střední hodnota** $\mathsf{E}X$, která vyjadřuje „očekávanou hodnotu" veličiny X.

- V případě diskrétního rozdělení ji spočítáme jako

$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li).}$$

- V případě spojitého rozdělení ji spočteme jako

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{(existuje-li).}$$

– **Rozptyl** veličiny X, který popisuje její variabilitu kolem $\mathsf{E}X$. Rozptyl je definovaný jako

$$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$

a je to vždy **nezáporné** číslo!
– Při výpočtech nás může zajímat $\mathsf{E}h(X)$. Tu spočteme z rozdělení X následovně:

- pro diskrétní: $\mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k)\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k)p_k$ (existuje-li),
- pro spojité: $\mathsf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$ (existuje-li).

Vlastnosti
– Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2 \mathsf{Var}\, X.$$

– Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny, pak platí

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$

Momentová vytvořující funkce veličiny X je funkce reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$ definovaná jako $\psi(t) = \mathsf{E}e^{tX}$ (existuje-li). Platí

$$\mathsf{E}X = \psi'(0), \quad \mathsf{Var}\, X = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$