Vlastnosti pravděpodobnosti

17.10.2017

1. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý].
   (a) Určete podmíněnou pravděpodobnost jevu A, když víme, že nastal jev C.
   (b) Jsou jevy B a C nezávislé?
   (c) Jsou jevy A,B,C nezávislé?
2. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
   (b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?
3. Přenášíme binární soubor, který obsahuje znaky "0" a "1". Pravděpodobnost, že se při přenosu zkreslí "0" je 1/4 a pravděpodobnost, že se zkreslí "1" je 1/6. Je známo, že přenášené znaky "0" a "1" se vyskytují v poměru 4:3.
   (a) S jakou pravděpodobností se přenášený znak zkreslí?
   (b) Obdrželi jsme znak "0". Jaká je pravděpodobnost, že jsme obdrželi nezkreslený znak, tj. že byla "0" opravdu vyslána?
   (c) S jakou pravděpodobností se posloupnost o 6 znacích při přenosu nezkreslí, jestliže jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle?
4. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu (a budeme mít radost).
   (a) Je pravděpodobnější, že odměnu dostaneme nebo že odměnu nedostaneme?
   (b) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?
5. *(Polyovo urnové schéma)* Krabice obsahuje a černých a b bílých koulí. Student náhodně vytáhne jednu kouli, poznačí si její barvu a vrátí ji zpět společně s d koulí téže barvy.
   (a) Jaká je pravděpodobnost vytažení bílé koule v prvním a druhém tahu?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi n vytaženými koulemi je právě k bílých?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že v $(n + 1)$-ním tahu vytáhneme bílou kouli?
6. Karel, Franta a Cyril postupně hází kostkou v pořadí K $\to$ F $\to$ C. Komu první padne šestka, ten vyhrává, a hra v takovém případě končí.
   (a) Určete pravděpodobnost, s jakou Cyril vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete, s jakou pravděpodobností vyhraje Karel (resp. Franta, Cyril).
7. Cyril a Dana hrají následující hru. Opakovaně hází kostkou a pokud na kostce padne nejvýše 4, zaplatí Cyril Daně 1 dolar. Padne-li 5 nebo 6, zaplatí Dana 1 dolar Cyrilovi. Hra končí ve chvíli, kdy jeden z hráčů nemá žádné peníze.
   (a) S jakou pravděpodobnost vyhraje Cyril, jestliže má na začátku 2 dolary a Dana 1 dolar?
   (b) S jakou pravděpodobnost vyhraje Cyril, jestliže má na začátku 4 dolary a Dana 2 dolary?

Opakování

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \mathsf{P}(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta:

Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}.$$